

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРАМ

Страдание даёт прозрение,
в прозрении — благодать

М. Щербаков

Тема 1: Вероятность и случайные величины

- 1.1.** В коробке лежат пять синих и три белых шара. Вася вытягивает шары до тех пор, пока не вытянет все синие. Какова вероятность того, что после вытягивания всех синих шаров в коробке останется а) хотя бы один белый шар? б) ровно один белый шар?
- 1.2.** В партии из N изделий имеется $M \leq N$ бракованных. Выбирается $n \leq N$ изделий из этой партии. Найдите вероятность того, что среди выбранных окажется ровно m бракованных, для схем выбора с возвращением и без.
- 1.3.** В предыдущей задаче обозначим через A_k событие, что на k -ом шаге вытянули брак, а через B_m событие, что всего вытянули m бракованных изделий. Найдите $P(A_k | B_m)$ для схем выбора с возвращением и без.
- 1.4.** В урне лежат 3 белых и 2 чёрных шара. Из неё переложили два вытянутых наугад шара в урну, в которой уже лежало 4 белых и 4 чёрных шара. Найдите вероятность вытянуть из второй урны чёрный шар.
- 1.5.** В урне лежат 20 белых и 10 чёрных шаров. Из неё наугад в пустую урну переложили 10 шаров, а потом из этой урны тоже наугад вытянули один шар. Найдите вероятность того, что он окажется белым.
- 1.6.** В первой урне 10 белых и 20 чёрных шаров, во второй — 10 белых и 10 чёрных шаров. Из первой урны наугад извлекают 4 шара, из второй 6 шаров, и перекладывают эти шары в третью пустую урну. Какова вероятность того, что шар, извлечённый из третьей урны, окажется белым?
- 1.7.** В корзине лежат три белых и два чёрных шара. Из неё без возвращения вытянули три шара. Найдите вероятность того, что это оказались чёрный, белый, чёрный шары (именно в таком порядке).
- 1.8.** В связке n ключей, из которых только один подходит к замку. Найдите вероятность открыть дверь ровно с k -й попытки, если после каждой неудачной попытки ключ возвращается / не возвращается в связку.
- 1.9.** Мастер Подземелий бросает кубик $1d4$ до тех пор, пока сумма выпавших при всех бросках очков не станет 3 или больше. Достоверно известно, что общая сумма очков оказалась равна ровно 3. Какова вероятность того, что было сделано ровно два броска?
- 1.10.** Игральный кубик подбрасывают до тех пор, пока не выпадет шестёрка. Найдите вероятность того, что единичка выпадет ровно три раза.
- 1.11.** Староста группы Б05-xxx заметил, что семинарист приходит на занятия со случайным опозданием в пределах 15 минут, при этом он разрешает проходить в аудиторию только тем студентам, которые пришли после него не позднее 5 минут. Староста же решил опоздать на семинар, но выбрал себе границу случайного опоздания всего в 10 минут, и время ожидания семинариста тоже 10 минут. Какова вероятность того, что он всё же посетит семинар?
- 1.12** (Парадокс Бертрانا). Какова вероятность того, что случайная хорда окружности больше стороны равностороннего треугольника, вписанного в эту окружность? Решите задачу для трёх различных способов задания случайной хорды: • случайно выбираются концы хорды на окружности; • случайно выбирается радиус окружности, после чего случайно выбирается середина хорды на нем; • случайно выбирается точка в круге, ограниченном окружностью, после чего проводится хорда с центром в этой точке.

1.13. Два стрелка стреляют по мишени. Первый попадает с вероятностью 0.5, второй с вероятностью 0.8. При этом они изначально бросают симметричную монетку, чтобы определить, кто будет стрелять. Найдите вероятность того, что стрелял первый, если известно, что мишень была поражена.

1.14. Вероятность заразиться некоторым вирусом равна 0.001. Имеется тест на вирус, который даёт ложный результат с вероятностью 0.01. Пусть тест показал положительный результат (то есть что вирус есть в организме). Найдите вероятность того, что вирус действительно в организме.

1.15 (Парадокс Бернштейна). Подбрасывают две одинаковые монеты. Проверьте на независимость (попарную и в совокупности) три события: когда первая монета выпала орлом, когда вторая монета выпала орлом, и когда ровно одна монета выпала орлом. Рассмотрите случай симметричных и несимметричных монет.

1.16. Для двух независимых случайных величин $\xi \sim \text{Bin}(n, p)$ и $\eta \sim \text{Bin}(m, p)$ найдите распределение величины $\xi + \eta$.

1.17. Для двух независимых случайных величин $\xi \sim \text{Pois}(\lambda)$ и $\eta \sim \text{Pois}(\theta)$ найдите распределение величины $\xi + \eta$.

1.18. Для $\xi \sim \text{Geom}(p)$ найдите $P(\xi \geq n)$ для всех $n \geq 0$.

1.19. Для независимых случайных величин $X_1, \dots, X_n \sim \text{Geom}(p)$ найдите распределение величины $\min\{X_1, \dots, X_n\}$.

1.20. Для независимых случайных величин $X_1, \dots, X_n \sim \text{Geom}(p)$ найдите распределение величины $X_1 + \dots + X_n$.

1.21. Для двух независимых случайных величин $\xi \sim \text{Geom}(p)$ и $\eta \sim \text{Geom}(q)$ с разными параметрами $p \neq q$ найдите распределение величины $\xi + \eta$.

1.22. Докажите существование двух независимых пуассоновских случайных величин.

1.23. Некоторое насекомое откладывает $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ яиц. Из них вылупляется Y потомков, причём вероятность развития насекомого из яйца равна p , и развитие насекомого из яйца не зависит ни от количества яиц, ни от развития других яиц. Найти распределение величины Y .

1.24. Любитель бабочек Владимир поймал $X \sim \text{Bin}(n, p)$ бабочек. Из них оказалось Y красивых бабочек, каждая красивая независимо от их количества и от остальных с вероятностью q . Найдите распределение величины Y .

1.25. Ося и Киса решают задачи независимо друг от друга: Ося по ОВиТМу, а Киса по матанализу. Известно, что количество решённых Осей задач имеет распределение $\text{Pois}(\lambda)$, а количество решённых Кисой задач имеет распределение $\text{Pois}(\theta)$. Найдите вероятность того, что Ося решил k задач, если вместе они решили n задач.

Дополнительные задачи

1.26. Двое бросают честную монетку, один подбросил её 10 раз, а другой — 11 раз. Найдите вероятность того, что у второго выпало больше орлов, чем у первого.

1.27. Вы участвуете в телешоу. Перед вами три закрытые двери: за одной автомобиль, за каждой из двух других по козе. Шоу происходит следующим образом. Вы выбираете дверь, после чего ведущий открывает одну из двух других дверей, за которой нет автомобиля. Далее вы можете поменять свой выбор двери, а можете не менять. После этого вы выигрываете то, что находится за выбранной вами дверью. Что выгодно: менять дверь, или не менять?

1.28. В мешке лежат 10 карточек. На 5 с обеих сторон изображён Андрей Михайлович, на 4 с обеих сторон изображён Алексей Владимирович, а на одной оставшейся с одной стороны изображён Андрей Михайлович, а с другой стороны — Алексей Владимирович. Одна из карточек

выбирается наугад и кладётся на стол случайной стороной. Пусть на видимой стороне оказался Андрей Михайлович. Какова вероятность того, что с обратной стороны тоже будет Андрей Михайлович?

1.29. При посадке в самолёт выстроилась очередь из n пассажиров, у каждого из которых имеется билет на одно из n мест. Первой в очереди стоит сумасшедшая старушка. Она вбегает в салон и садится на случайное место (возможно, и на своё). Далее пассажиры по очереди занимают свои места. В случае, если место очередного пассажира уже занято, он садится случайным образом на одно из свободных мест. Какова вероятность того, что последний пассажир займёт своё место?

1.30. В семье пятеро детей. Гость считает, что мальчики и девочки рождаются равновероятно и независимо друг от друга. Ему стало достоверно известно, что двое мальчиков в семье точно есть. Какова вероятность того, что оставшиеся дети тоже мальчики?

1.31. Для таких трёх попарно независимых равновероятных событий A, B, C , что $A \cap B \cap C = \emptyset$, найдите максимально возможное значение вероятности $P(A)$ (она же $P(B)$ и $P(C)$).

1.32. Вы решили поехать на горнолыжку и звоните двум своим друзьям узнать, как там погода. Оба сказали, что снега нет. По вашим априорным данным, вероятность снега равна 0.8. Кроме того, ваши друзья могут пошутить с вероятностью 0.3 независимо друг от друга. Найдите апостериорную вероятность того, что идёт снег.

1.33. Если телефонный разговор длится время t , то вероятность закончить его в промежутке $(t, t + h)$ равна $\alpha h + o(h)$ при $h \rightarrow 0$. Найти вероятность того, что разговор продлится дольше времени t .

1.34. За бесконечным в две стороны столом (изоморфным целым числам) сидят бесконечное количество фивтов и пишут контрольную по ТВ. Каждый студент независимо от других имеет шанс $\frac{1}{2}$ решить контрольную. Если же он контрольную не решает, он имеет шанс $\frac{1}{2}$ списать её у соседа справа, при условии, что тот решил её. Аналогично с соседом слева. Найдите вероятность того, что студент на нулевом месте решит контрольную.

1.35. Геометрическое распределение обладает *отсутствием памяти*, то есть для $\xi \sim \text{Geom}(p)$

$$P\{\xi > m + n \mid \xi \geq n\} = P\{\xi > m\}$$

для всех $n, m \geq 0$.

1.36. Единственное распределение на натуральных числах, обладающее отсутствием памяти, — геометрическое распределение.

1.37 (Парадокс транзитивности). Для случайных величин ξ, η скажем, что « ξ больше η по вероятности», если $P\{\xi > \eta\} > P\{\xi \leq \eta\}$. Является ли отношение «больше по вероятности» транзитивным?

Тема 2: Математическое ожидание, дисперсия, ковариация

2.1. Шестигранный кубик подбрасывается независимо n раз. Случайная величина ξ равна количеству выпавших единиц, а η — сумме выпавших очков. Найдите математические ожидания этих величин.

2.2. Почтальон случайно перепутал n писем, адресованных n различным получателям. Ничто же сумняшеся, он решил случайно перемешать письма и раздать их получателям. Найдите математическое ожидание количества людей, которые получают письма, предназначенные именно им.

2.3. Найдите математическое ожидание и дисперсию биномиального распределения.

2.4. Найдите математическое ожидание и дисперсию пуассоновского распределения.