

выбирается наугад и кладётся на стол случайной стороной. Пусть на видимой стороне оказался Андрей Михайлович. Какова вероятность того, что с обратной стороны тоже будет Андрей Михайлович?

1.29. При посадке в самолёт выстроилась очередь из n пассажиров, у каждого из которых имеется билет на одно из n мест. Первой в очереди стоит сумасшедшая старушка. Она вбегает в салон и садится на случайное место (возможно, и на своё). Далее пассажиры по очереди занимают свои места. В случае, если место очередного пассажира уже занято, он садится случайным образом на одно из свободных мест. Какова вероятность того, что последний пассажир займёт своё место?

1.30. В семье пятеро детей. Гость считает, что мальчики и девочки рождаются равновероятно и независимо друг от друга. Ему стало достоверно известно, что двое мальчиков в семье точно есть. Какова вероятность того, что оставшиеся дети тоже мальчики?

1.31. Для таких трёх попарно независимых равновероятных событий A, B, C , что $A \cap B \cap C = \emptyset$, найдите максимально возможное значение вероятности $P(A)$ (она же $P(B)$ и $P(C)$).

1.32. Вы решили поехать на горнолыжку и звоните двум своим друзьям узнать, как там погода. Оба сказали, что снега нет. По вашим априорным данным, вероятность снега равна 0.8. Кроме того, ваши друзья могут пошутить с вероятностью 0.3 независимо друг от друга. Найдите апостериорную вероятность того, что идёт снег.

1.33. Если телефонный разговор длится время t , то вероятность закончить его в промежутке $(t, t + h)$ равна $\alpha h + o(h)$ при $h \rightarrow 0$. Найти вероятность того, что разговор продлится дольше времени t .

1.34. За бесконечным в две стороны столом (изоморфным целым числам) сидят бесконечное количество фивтов и пишут контрольную по ТВ. Каждый студент независимо от других имеет шанс $\frac{1}{2}$ решить контрольную. Если же он контрольную не решает, он имеет шанс $\frac{1}{2}$ списать её у соседа справа, при условии, что тот решил её. Аналогично с соседом слева. Найдите вероятность того, что студент на нулевом месте решит контрольную.

1.35. Геометрическое распределение обладает *отсутствием памяти*, то есть для $\xi \sim \text{Geom}(p)$

$$P\{\xi > m + n \mid \xi \geq n\} = P\{\xi > m\}$$

для всех $n, m \geq 0$.

1.36. Единственное распределение на натуральных числах, обладающее отсутствием памяти, — геометрическое распределение.

1.37 (Парадокс транзитивности). Для случайных величин ξ, η скажем, что « ξ больше η по вероятности», если $P\{\xi > \eta\} > P\{\xi \leq \eta\}$. Является ли отношение «больше по вероятности» транзитивным?

Тема 2: Математическое ожидание, дисперсия, ковариация

2.1. Шестигранный кубик подбрасывается независимо n раз. Случайная величина ξ равна количеству выпавших единиц, а η — сумме выпавших очков. Найдите математические ожидания этих величин.

2.2. Почтальон случайно перепутал n писем, адресованных n различным получателям. Ничто же сумняшеся, он решил случайно перемешать письма и раздать их получателям. Найдите математическое ожидание количества людей, которые получают письма, предназначенные именно им.

2.3. Найдите математическое ожидание и дисперсию биномиального распределения.

2.4. Найдите математическое ожидание и дисперсию пуассоновского распределения.

2.5. Найдите математическое ожидание и дисперсию геометрического распределения.

2.6. Каждое ребро полного графа на n вершинах равновероятно (и независимо друг от друга) красят в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. Случайная величина ξ равна количеству красных треугольников. Найдите её математическое ожидание и дисперсию.

2.7. В урне лежат 10 белых и 10 чёрных шаров. К ней подходят 10 друзей и тянут из неё поочередно пары шаров (без возвращения). Найдите математическое ожидание и дисперсию количества вытянутых одноцветных пар.

2.8. Случайная величина ξ имеет распределение

$$P\{\xi = k\} = \frac{C}{k(k+1)} \quad \text{для } k = 1, 2, 3, \dots$$

Найдите константу $C \in \mathbb{R}$. Найдите для получившегося распределения математическое ожидание.

2.9 (Парадокс ожидания серии). Проводится серия испытаний Бернулли с вероятностью успеха $\frac{1}{2}$. Для $i, j \in \{0, 1\}$ обозначим через ξ_{ij} случайную величину, равную количеству испытаний до первого появления последовательности ij . (Формально, для каждой пары (i, j) нужно построить своё пространство конечных, но сколь угодно больших последовательностей, длина которых имеет геометрическое распределение.) Найдите математические ожидания случайных величин ξ_{00} и ξ_{01} .

2.10. Случайная величина ξ равновероятно принимает значения из некоторого конечного множества $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$. Найдите $\arg \min_a \mathbb{E} |\xi - a|$ и $\arg \min_b \mathbb{E} (\xi - b)^2$.

2.11. Случайные величины ξ и η независимы, одинаково распределены и имеют конечные математическое ожидание и дисперсию. Найдите коэффициент корреляции случайных величин $\xi_1 = \alpha\xi + \beta\eta$ и $\xi_2 = \alpha\xi - \beta\eta$. Когда они некоррелированы? Что в этом случае можно сказать об их независимости?

2.12. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ положительны, независимы в совокупности и имеют одно и то же невырожденное распределение. Положим

$$\eta_k := \frac{\xi_k}{\xi_1 + \dots + \xi_n} \quad \text{для любого } k = 1, \dots, n.$$

Найдите $\mathbb{E} \eta_k$ и коэффициент корреляции между η_k и η_ℓ для $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$.

Указание: пользуйтесь (би)линейностью, не расписывайте всё по определению!

2.13. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ независимы в совокупности. Определим случайные величины $\zeta_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $\zeta_n^* := \xi_1\eta_1 + \dots + \xi_n\eta_n$. Найти $\mathbb{E} \zeta_n$, $\mathbb{E} \zeta_n^*$, $\text{Var} \zeta_n$, $\text{Var} \zeta_n^*$, $\text{cov}(\zeta_n; \zeta_n^*)$, если $\mathbb{E} \xi_k = a$, $\text{Var} \xi_k = \sigma^2$, а $\eta_k \sim \text{Bern}(p)$.

2.14. Докажите следующее неравенство КБШ:

$$|\mathbb{E} \xi \eta| \leq \mathbb{E} |\xi \eta| \leq \sqrt{\mathbb{E} \xi^2} \sqrt{\mathbb{E} \eta^2}.$$

Выведите из него неравенство КБШ для ковариации.

2.15. Если конечно $\mathbb{E} \xi^2$, то конечно и $\mathbb{E} \xi$.

Тема 3: Неравенства и Предельные Законы

3.1. Пусть случайная величина ξ_n равна среднему значению очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Найдите предел по вероятности для ξ_n .

3.2. Для независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots \sim \text{Bern}(p)$ обозначим через η_n количество таких i от 1 до n , что $\xi_i = \xi_{i+1} = 1$. Найдите предел по вероятности для $\frac{\eta_n}{n}$.