

2.5. Найдите математическое ожидание и дисперсию геометрического распределения.

2.6. Каждое ребро полного графа на n вершинах равновероятно (и независимо друг от друга) красят в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. Случайная величина ξ равна количеству красных треугольников. Найдите её математическое ожидание и дисперсию.

2.7. В урне лежат 10 белых и 10 чёрных шаров. К ней подходят 10 друзей и тянут из неё поочередно пары шаров (без возвращения). Найдите математическое ожидание и дисперсию количества вытянутых одноцветных пар.

2.8. Случайная величина ξ имеет распределение

$$P\{\xi = k\} = \frac{C}{k(k+1)} \quad \text{для } k = 1, 2, 3, \dots$$

Найдите константу $C \in \mathbb{R}$. Найдите для получившегося распределения математическое ожидание.

2.9 (Парадокс ожидания серии). Проводится серия испытаний Бернулли с вероятностью успеха $\frac{1}{2}$. Для $i, j \in \{0, 1\}$ обозначим через ξ_{ij} случайную величину, равную количеству испытаний до первого появления последовательности ij . (Формально, для каждой пары (i, j) нужно построить своё пространство конечных, но сколь угодно больших последовательностей, длина которых имеет геометрическое распределение.) Найдите математические ожидания случайных величин ξ_{00} и ξ_{01} .

2.10. Случайная величина ξ равновероятно принимает значения из некоторого конечного множества $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$. Найдите $\arg \min_a \mathbb{E} |\xi - a|$ и $\arg \min_b \mathbb{E} (\xi - b)^2$.

2.11. Случайные величины ξ и η независимы, одинаково распределены и имеют конечные математическое ожидание и дисперсию. Найдите коэффициент корреляции случайных величин $\xi_1 = \alpha\xi + \beta\eta$ и $\xi_2 = \alpha\xi - \beta\eta$. Когда они некоррелированы? Что в этом случае можно сказать об их независимости?

2.12. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ положительны, независимы в совокупности и имеют одно и то же невырожденное распределение. Положим

$$\eta_k := \frac{\xi_k}{\xi_1 + \dots + \xi_n} \quad \text{для любого } k = 1, \dots, n.$$

Найдите $\mathbb{E} \eta_k$ и коэффициент корреляции между η_k и η_ℓ для $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$.

Указание: пользуйтесь (би)линейностью, не расписывайте всё по определению!

2.13. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ независимы в совокупности. Определим случайные величины $\zeta_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $\zeta_n^* := \xi_1\eta_1 + \dots + \xi_n\eta_n$. Найти $\mathbb{E} \zeta_n$, $\mathbb{E} \zeta_n^*$, $\text{Var} \zeta_n$, $\text{Var} \zeta_n^*$, $\text{cov}(\zeta_n; \zeta_n^*)$, если $\mathbb{E} \xi_k = a$, $\text{Var} \xi_k = \sigma^2$, а $\eta_k \sim \text{Bern}(p)$.

2.14. Докажите следующее неравенство КБШ:

$$|\mathbb{E} \xi \eta| \leq \mathbb{E} |\xi \eta| \leq \sqrt{\mathbb{E} \xi^2} \sqrt{\mathbb{E} \eta^2}.$$

Выведите из него неравенство КБШ для ковариации.

2.15. Если конечно $\mathbb{E} \xi^2$, то конечно и $\mathbb{E} \xi$.

Тема 3: Неравенства и Предельные Законы

3.1. Пусть случайная величина ξ_n равна среднему значению очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Найдите предел по вероятности для ξ_n .

3.2. Для независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots \sim \text{Bern}(p)$ обозначим через η_n количество таких i от 1 до n , что $\xi_i = \xi_{i+1} = 1$. Найдите предел по вероятности для $\frac{\eta_n}{n}$.

3.3. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы, $\mathbb{E} \xi_k = a$, $\text{Var} \xi_k = \sigma^2 < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть

$$\zeta_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \xi_i \xi_j.$$

Найдите предел по вероятности для $\frac{\zeta_n}{n^2}$.

3.4. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ состоит из независимых одинаково распределённых случайных величин, $\mathbb{E} \xi_n = 0$, $\text{Var} \xi_n = \sigma^2 < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Удовлетворяют ли ЗБЧ последовательности случайных величин

$$\zeta_n = \xi_n + \xi_{n+1} \quad \eta_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n^{\frac{1}{3}} \rfloor} \xi_{n+k}?$$

3.5. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ образована независимыми случайными величинами

$$\mathbb{E} \xi_n = 0, \quad \text{Var} \xi_n = C \cdot n^\alpha, \quad C > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При каких значениях α последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ удовлетворяет ЗБЧ и при каких значениях α может не удовлетворять?

3.6. Последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ и $\eta_1, \eta_2, \dots$ образованы одинаково распределёнными случайными величинами, независимыми внутри каждой последовательности (случайные величины ξ_i и η_i могут не быть независимыми), $\mathbb{E} \xi_i = \mathbb{E} \eta_j = a$, $\text{Var} \xi_i = \text{Var} \eta_j < \infty$. Выполняется ли ЗБЧ для последовательности $\zeta_1, \zeta_2, \dots$, где

$$\zeta_{2k-1} = \xi_k, \quad \zeta_{2k} = \eta_k, \quad k \in \mathbb{N}?$$

3.7 (Обобщённое неравенство Маркова). Для любой неотрицательной функции $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, неубывающей и положительной на $[a, +\infty)$, и любой случайной величины ξ верно, что

$$P(\xi \geq a) \leq \frac{\mathbb{E} \varphi(\xi)}{\varphi(a)}.$$

3.8. Пусть ξ, η имеют конечные математические ожидания и дисперсии, а их корреляция равна ρ . Тогда

$$P \left\{ |\xi - \mathbb{E} \xi| \geq a \sqrt{\text{Var} \xi} \quad \text{или} \quad |\eta - \mathbb{E} \eta| \geq a \sqrt{\text{Var} \eta} \right\} \leq \frac{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}{a^2}.$$

Указание: $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$.

3.9. *It is Behrman's great masterpiece — he painted it there the night that the last leaf fell.*

Джонси наблюдает за тем, как за окном опадают листья. Она заметила, что на n -ый день осени за её окном пролетают n листьев, каждый из которых по схеме испытаний Бернулли с вероятностью $p_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ является кленовым, а с вероятностью $1 - p_n$ является листом плюща. Докажите, с каждым днём вероятность увидеть за окном кленовый лист стремится к нулю.

3.10. Пусть дана последовательность попарно некоррелированных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, у которых определены математические ожидания, а дисперсии равномерно ограничены некоторой константой. Обозначим $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$

$$P \left\{ \left| \frac{S_n - \mathbb{E} S_n}{n^{0.5+\delta}} \right| > \varepsilon \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

3.11. Покажите, существенно используя дискретность вероятностного пространства, что в ЗБЧ сходимость по вероятности можно заменить на сходимость с вероятностью 1 (т.н. почти наверное).

3.12. Выведите из Закона Больших Чисел (а точнее, из неравенства Чебышёва) теорему Вейерштрасса о том, что любую непрерывную функцию $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ можно сколь угодно точно приблизить многочленами.

Указание. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [0, 1]$ рассмотрите случайные величины $\xi_{n,x} \sim \text{Bin}(n, x)$ и полиномы Бернштейна $B_n(x) := \mathbb{E} f\left(\frac{\xi_{n,x}}{n}\right)$.

3.13. Покажите, что если нарушается условие независимости, то ЦПТ может не выполняться.

3.14 (Первая часть леммы Бореля–Кантелли). В любой последовательности событий $A_1, A_2, \dots$, при условии $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, с вероятностью 1 происходит лишь конечное число событий A_n .

3.15 (Усиленный Закон Больших Чисел в форме Кантелли). Пусть независимые случайные величины ξ_n имеют нулевое математическое ожидание, и $\mathbb{E} \xi_n^4 \leq C$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = 0$ с вероятностью 1. Доказательство не должно явно использовать дискретность пространства.

Тема 4: Системы множеств

4.1. Имеются множества A и B , отображение $f: A \rightarrow B$, некоторая система $\mathcal{A}$ подмножеств множества A , и некоторая система $\mathcal{B}$ подмножеств множества B . Обозначим

$$f(\mathcal{A}) := \{f(X) \subset B : X \in \mathcal{A}\} \quad \text{и} \quad f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(Y) \subset A : Y \in \mathcal{B}\}.$$

- (а) Если $\mathcal{B}$ — кольцо, то $f^{-1}(\mathcal{B})$ — тоже кольцо.
- (б) Если $\mathcal{B}$ — σ -алгебра, то $f^{-1}(\mathcal{B})$ — тоже σ -алгебра.
- (с) Система $f(\mathcal{A})$ не обязана быть полукольцом, даже если $\mathcal{A}$ — σ -алгебра.

4.2. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — две σ -алгебры с общей единицей. Обязательно ли являются σ -алгебрами

- (а) $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, (б) $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, (с) $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$, (д) $\mathcal{F} \triangle \mathcal{G}$? А какие из них могут являться?

4.3. Иногда полуалгеброй называют (непустую) систему подмножеств множества Ω , замкнутую относительно пересечения, и с таким дополнительным свойством: для любого элемента полуалгебры его дополнение (до Ω) представимо в виде дизъюнктного конечного объединения элементов полуалгебры.

Покажите, что полуалгебра в новом смысле является полукольцом, но обратное не всегда верно. Является ли полуалгебра в нашем (старом) смысле полуалгеброй в новом смысле? А наоборот?

4.4. Приведите пример кольца, не являющегося алгеброй; σ -кольца, не являющегося σ -алгеброй.

4.5. Любое σ -кольцо является δ -кольцом. Обратное верно для σ - и δ -алгебр, но не для σ - и δ -колец.

4.6. Опишите σ -кольцо и σ -алгебру, порождённые одноточечными подмножествами прямой.

4.7. Для всякого элемента из порождённого кольца $R(\mathcal{X})$ найдётся конечное покрытие элементами из $\mathcal{X}$.

4.8. Если система $\mathcal{X}$ не более чем счётна, то и наименьшее кольцо $R(\mathcal{X})$ не более чем счётно.

4.9. Любой элемент порождённого σ -кольца $\sigma(\mathcal{X})$ лежит в другом порождённом σ -кольце $\sigma(\mathcal{Y})$ для некоторого не более чем счётного подсемейства $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$.

4.10. Для системы $\mathcal{X}$ с единицей и произвольного B обозначим $\mathcal{X} \cap B := \{X \cap B : X \in \mathcal{X}\}$. Тогда для порождённых σ -алгебр выполняется

$$\sigma(\mathcal{X} \cap B) = \sigma(\mathcal{X}) \cap B.$$

4.11. Мощность любой конечной σ -алгебры является степенью двойки.

4.12. Если σ -алгебра бесконечна, то она несчётна.