

Конспект лекций
по ОВиТМ

Конспект лекций по Основам Вероятности и Теории Меры

ДЖЕНЖЕР С. В.

Конца не будет череде учёных книг

М. Щербаков

При написании конспекта в первую очередь преследовалась цель, с одной стороны, дать полное строгое изложение материала, а с другой стороны — избежать излишней сухости и формализма. В некоторых местах автор позволяет себе фразы в духе «достаточно показать», «несложно установить» и т.д. — это не означает, что если повторить их на экзамене, как попугай, то этого будет достаточно для хорошего ответа.

Автор надеется, что читатель сам сможет восстановить пробелы в изложении и некоторый недостаток строгости.

Обычно курс теории вероятностей начинается со слов «пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — Колмогоровская тройка, где $\mathcal{F}$ — σ -алгебра с единицей Ω , а P — вероятностная мера. . . » После этих слов некоторая часть слушателей выпадает и больше на лекциях не появляется. Чтобы такого не произошло, перед курсом теории вероятностей мы читаем курс ОВиТМ, после которого вам должно казаться, что начинать курс со слов «возьмём Колмогоровскую тройку» — это самая естественная вещь на свете.

СОДЕРЖАНИЕ

Список литературы	3
§1. Дискретное вероятностное пространство и случайные величины	4
§2. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация	9
§3. Предельные законы	12
§4. Системы множеств	17
§5. Мера	20
§6. Внешняя мера и измеримость по Лебегу	24
§7. Мера Лебега—Стилтьеса. Борелевские меры	30
§8. Измеримые функции	33
§9. Сходимости измеримых функций	37
§10. Интеграл Лебега	43
§11. Теоремы о предельном переходе	49
§12. Теорема Радона—Никодима	53
§13. Произведение мер. Теорема Фубини	59
§14. Характеристические функции	66
Задачи к семинарам	73
Решения студентов	88
Теорминимум	93
Программа курса	94

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. §§1–3: *А. Н. Ширяев*, Вероятность
2. §§4–6, 8: *М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов*, Мера и интеграл
3. §§7, 14–16: *В. И. Богачёв*, Основы теории меры, том 1
4. §§10–13: *П. Халмош*, Теория меры

Дополнительная литература

5. *В. И. Богачёв, О. Г. Смолянов*, Действительный и функциональный анализ. Главы 2–4
6. *В. Босс*, Том 4: Вероятность, информация, статистика. Главы 1, 3
7. *В. Босс*, Том 5: Функциональный анализ. Глава 3
8. *G. B. Folland*, Real analysis: Modern Techniques and Their Applications. Главы 1, 2

§1. Дискретное вероятностное пространство и случайные величины

Глянем, рассердимся — что за дела!
Шансы велики, а вероятность мала...

М. Щербаков

Пусть некто проводит случайный эксперимент, результатами которого являются некоторые *элементарные исходы* из множества Ω . Если некто проведёт много экспериментов, каждое $\omega \in \Omega$ случится с некоторой частотой, причём сумма частот будет равна единице. Идеализируя это понятие, от частоты мы переходим к вероятности.

Итак, рассмотрим некоторое **дискретное**, то есть конечное или счётное, множество Ω *элементарных исходов*. Зададим на них вероятность $P: \Omega \rightarrow [0, 1]$ так, что $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$. *Событиями* на дискретном множестве элементарных исходов называются его произвольные подмножества. Таким образом, вероятность P логичным образом продлевается до отображения $2^\Omega \rightarrow [0, 1]$ по правилу

$$P(A) := \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Пара (Ω, P) называется *дискретным вероятностным пространством*.

Пример: *классическая модель*, где на конечной Ω все элементарные исходы равновероятны, и вероятность события, таким образом, пропорциональна его мощности и равна

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Перечислим несколько основных (но довольно очевидных) свойств вероятности.

- 1) $P(\emptyset) = 0$ и $P(\Omega) = 1$;
- 2) вероятность *монотонна*, то есть $P(A) \leq P(B)$ при $A \subset B$;
- 3) вероятность *σ -аддитивна*, то есть $P(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$;
- 4) выполняется формула включений-исключений: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, и её аналог с большим количеством событий.

Здесь мы пользуемся очень удобной операцией $\sqcup$, которая называется *дизъюнктивным объединением* и обозначает объединение множеств, которые автоматически полагаются дизъюнктивными, то есть попарно непересекающимися (такие события называют *несовместными*). Это немного отличается от обычного теоретико-множественного дизъюнктного объединения, в котором для каждого множества создаётся его уникальная копия.

Далее обсудим несколько важных формул из теории вероятности.

Допустим, у нас имелось некоторое вероятностное пространство (Ω, P) , в котором мы жили, а потом произошло некоторое событие B . Логично, что теперь наше старое пространство не годится: наши сведения устарели, вероятность уже не та. В частности, теперь вероятность события B стала равна 1. Нам нужно пересчитать вероятности и перенормировать с учётом того, что произошло событие B . Так появляется **условная вероятность** события A при условии B :

$$P(A | B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Пример. На классическом вероятностном пространстве броска многогранного кубика рассмотрели событие B , что выпала чётная грань. Условные вероятности будут равны доле чётных граней в данном событии по отношению к общему количеству чётных граней кубика.

Определение выше не совсем корректно: если $P(B) = 0$, возникает неопределённость вида $\frac{0}{0}$. С физической точки зрения, мы говорили, что « B произошло», и вряд ли мы могли сказать такое про события нулевой вероятности. С математической точки зрения, удобно полагать, что неопределённость $\frac{0}{0}$ раскрывается любым способом, то есть заранее верны равенства его любому другому числу.

Важно понимать, что условная вероятность — это вероятность со множеством B , выступающим в роли Ω . То есть для неё выполнены все свойства, указанные выше (и ниже).

В задачах бывает удобно выбрать *разбиение* $\Omega = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$. В таком случае для события A выполнено

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A | B_n)P(B_n).$$

Равенство первого и третьего выражений называют **формулой полной вероятности**.

Пример. Вы проснулись утром и забыли, какой сейчас день недели и нужно ли вам на пары. Вы знаете, что во вторник, в среду, в четверг и в пятницу вам нужно на пары с вероятностью $\frac{3}{4}$ (скорее всего, там будут важные занятия), в субботу вам нужно на пары с вероятностью $\frac{1}{2}$ (там когда-то маячила физкультура), а в воскресенье и понедельник у вас выходной, и на пары не нужно. Считая, что все дни равновероятны, вы хотите теперь прикинуть, с какой вероятностью вам всё же нужно на пары. По формуле полной вероятности легко получаете

$$P(\text{пары}) = 0 \cdot \frac{1}{7} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} + 0 \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{2}$$

и дальше не знаете, что выбрать.

Иногда возникает следующая ситуация. Для некоторого разбиения $\Omega = \bigsqcup_n B_n$ вы знали (или прикинули) все *априорные вероятности* $P(B_n)$. Затем произошло событие A , и вам нужно обновить ваши данные — то есть пересчитать априорные вероятности. Так вы получите *апостериорные вероятности*

$$P(B_n | A) = \frac{P(A \cap B_n)}{P(A)} = \frac{P(A | B_n)P(B_n)}{\sum_i P(A | B_i)P(B_i)}.$$

Равенство первого и третьего выражений называют **формулой Байеса**.

Пример (продолжение). Прошло некоторое время, и вы поняли, что на пары нужно было, и что вы зря на них не пошли. Но вы всё ещё не вспомнили, какой сейчас день недели. По формуле Байеса находим

$$P(\text{четверг} | \text{пары}) = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{14},$$

то есть вероятность четверга возросла в полтора раза. Аналогично произойдёт с другими рабочими днями. Нетрудно убедиться, что вероятности выходных занулятся, а вероятность субботы не поменяется.

Иногда бывает полезной **формула умножения вероятностей**. Называется она так потому, что удобно записывать пересечение событий формально как произведение, опуская таким образом все знаки между ними. Формула формулируется просто: для произвольных событий $A_1, \dots, A_n$ выполнено

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 \dots A_{n-1}).$$

Формула доказывается раскрытием условных вероятностей по определению.

Иногда справа от условия события разделяют запятыми, подразумевая, что все эти события произошли. Но пересечение событий как раз и означает, что все они произошли.

Пример. Вы и несколько ваших одноклассников тянете билеты на экзамен, среди которых один плохой. Вы хотите понять, каким в очереди надо встать, чтобы с меньшей вероятностью вытянуть плохой билет (вы совершенно не думаете о ваших одноклассниках). Пусть вы стоите в очереди k -ым, а всего билетов $n \geq k$. Тогда плохой билет вы вытянете, только если его сначала не вытянет первый, потом не вытянет второй, и так далее, что в итоге даёт

$$P(\text{вытянуть плохой}) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

То есть надо вставать так, чтобы плохие билеты до вас совсем закончились :)

Одним из важнейших свойств событий, отличающих теорию вероятностей от анализа, является независимость событий. Интуитивно понятное определение такое: событие A независимо от B , если событие B не даёт информации о событии A , то есть

$$P(A | B) = P(A).$$

Если раскрыть определение условной вероятности, получим симметричное определение: события A, B **независимы**, если

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Иногда пишут $A \perp B$. Например, все события вероятности 0 или 1 независимы с другими.

Пример. Итак, перед вами всего один человек в очереди тянуть билет. Лежит 10 билетов, и один из них плохой. Являются ли независимыми события, что товарищ перед вами и вы сами вытянули хорошие билеты? Интуитивно кажется, что события должны быть зависимы: если студент перед вами вытянул плохой билет, вы уже можете не бояться (а только посочувствовать). Давайте проверим это. Обозначим через A событие, что студент перед вами вытянул хороший билет; через B обозначим событие, что вы сами вытянули хороший билет. Тогда, как мы обсуждали в примере выше,

$$P(A) = P(B) = \frac{9}{10}.$$

При этом

$$P(AB) = P(A)P(B | A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{10} < \frac{81}{100} = P(A)P(B),$$

откуда видим, что величины и правда зависимы.

Если имеется несколько (конечный или бесконечный набор) событий, можно рассмотреть *попарную независимость*. Иногда этого бывает мало. События $A_1, A_2, \dots$, называются **независимыми в совокупности**, если (для любого конечного набора выполнено свойство независимости, то есть) для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых попарно различных $i_1, \dots, i_n$ выполнено

$$P(A_{i_1} \dots A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_n}).$$

Упражнение 1.А. Если события независимы в совокупности, то при замене любых из них на их дополнения независимость в совокупности сохранится.

Очевидно, из независимости в совокупности следует попарная независимость. Обратное далеко не всегда верно.

Пример (тетраэдр Бернштейна). Вершины тетраэдра покрашены в три цвета: красный, синий, зелёный, и четвёртая вершина трёхцветная. Тетраэдр подбрасывают и смотрят, какой вершиной он упал вверх; все вершины равновероятны. Нетрудно убедиться, что три события, когда наверху оказался красный/синий/зелёный цвет, независимы попарно, но не в совокупности.

Рассмотрим ещё один классический пример вероятностного пространства. Он возникает из построения **схемы испытаний Бернулли**. Неформально, это схема проведения n независимых экспериментов, каждый из которых заканчивается успешно с некоторой одинаковой для всех вероятностью p . Формально, $\Omega = \{0, 1\}^n$ и

$$P(\omega) = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \omega_i},$$

где $p \in [0, 1]$ — некоторый заранее фиксированный параметр, называемый *вероятностью успеха*.

Теорема 1.1. Для любых $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$ события $\{\omega_1 = a_1\}, \dots, \{\omega_n = a_n\}$ независимы в совокупности.

Доказательство. Зафиксируем произвольные номера: $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$. Заметим, что событие $\{\omega_{i_1} = a_{i_1}, \dots, \omega_{i_m} = a_{i_m}\}$ состоит из 2^{n-m} элементарных исходов, в которых $n-m$ координат исхода ω могут варьироваться. Обозначим через k количество единиц в наборе $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$.

Таким образом,

$$P\{\omega_{i_1} = a_{i_1}, \dots, \omega_{i_m} = a_{i_m}\} = p^k(1-p)^{m-k} \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} p^j(1-p)^{n-m-j} = p^k(1-p)^{m-k},$$

то есть вероятность не зависит от остальных бросков монеты вообще. В частности,

$$P\{\omega_\ell = a_\ell\} = p^{a_\ell}(1-p)^{1-a_\ell}.$$

Тогда

$$P\{\omega_{i_1} = a_{i_1}\} \cdot \dots \cdot P\{\omega_{i_m} = a_{i_m}\} = p^k(1-p)^{m-k},$$

что заканчивает доказательство. $\square$

Только что мы писали $\omega_i = a_i$, подразумевая, что нас интересует только i -я координата вектора ω . Иными словами, мы построили отображение $\omega \mapsto \omega_i$, и исследовали его прообразы. Это довольно естественное желание: придумать числовую интерпретацию нашего случайного эксперимента (потому что с числами проще работать). Для этого буквально нужно сопоставить каждому элементарному исходу некоторое число. Такое сопоставление $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется **случайной величиной**.

Обратите внимание, что только в нашем, дискретном, случае любая функция $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ является случайной величиной. Вообще же это не так.

Неформально, случайная величина является случайным числом (в английском даже называется *random variable*). Поэтому с ними удобно работать как с числами, как бы забывая, что на самом деле это функции. Например, для случайных величин $\xi, \eta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ случайная величина ζ , равная их сумме, задаётся как $\zeta = \xi + \eta$ вместо $\zeta(\omega) = \xi(\omega) + \eta(\omega)$. Ещё одно удобное сокращение: для произвольного $B \subset \mathbb{R}$

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\} =: \{\xi \in B\}.$$

Это обозначение и правда очень удобно: например, вместо $(\xi + \eta)^{-1}((-\infty, c))$ можно написать $\{\xi + \eta < c\}$, а вместо $(\max(\xi, \eta))^{-1}((-\infty, c))$ можно написать $\{\xi < c\} \cap \{\eta < c\}$, или, что то же самое, $\{\max(\xi, \eta) < c\}$, где под $\max(\xi, \eta)$ понимается функция $\omega \mapsto \max(\xi(\omega), \eta(\omega))$.

Каждой случайной величине $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ соответствует **функция вероятности** $P_\xi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ (по-английски PMF, *probability mass function*), которая задаётся как

$$P_\xi(x) := P\{\xi = x\}.$$

Набор $\{(x, P_\xi(x))\}_{x \in \text{Im } \xi}$ называется **распределением случайной величины ξ** . Опытный читатель заметит, что, формально, функция вероятности и распределение — это одно и то же (потому что функция и является множеством пар). Это неспроста: в теории вероятностей вы поймёте, что распределение случайной величины как раз и является вероятностной мерой на прямой.

Упражнение 1.В. Найдите распределение константы.

Обратите внимание, что две совершенно разные величины могут иметь одинаковое распределение. Распределение случайной величины показывает, с какой «частотой» величина принимает те или иные значения; оно ничего не показывает про поведение величины как функции на Ω . Единственное исключение в этом смысле — константа: не бывает двух разных функций, равных по распределению одной константе (точнее говоря, если обе величины имеют распределение константы, это означает, что они отличаются на события нулевой вероятности). Это очень важное свойство, которым мы позже будем много пользоваться в теории вероятностей и в статистике.

Случайная величина ξ имеет **распределение Бернулли** с параметром $p \in [0, 1]$, пишут $\xi \sim \text{Bern}(p)$, если

$$P\{\xi = 1\} = p \quad \text{и} \quad P\{\xi = 0\} = 1 - p.$$

Пример: если нечестную монетку подбросить один раз и интерпретировать решку нулём, а орла единицей, получится распределение Бернулли.

Случайная величина ξ имеет **биномиальное распределение** с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $p \in [0, 1]$, пишут $\xi \sim \text{Bin}(n, p)$, если

$$P\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{где} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Пример: если нечестную монетку подбросить n раз и каждый раз интерпретировать решку нулём, а орла единицей, то количество выпавших орлов будет иметь биномиальное распределение. (А количество выпавших решек?) Иными словами, для схемы испытаний Бернулли (Ω, P) случайная величина $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i$ имеет биномиальное распределение.

Теорема 1.2 (Теорема Пуассона). Пусть $\xi_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$, и $np_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$ для $0 < \lambda < \infty$. Тогда величины ξ_n сходятся по распределению к **распределению Пуассона** с параметром λ , то есть

$$P\{\xi_n = k\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{для всех} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. При любом фиксированном k имеем

$$P\{\xi_n = k\} = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{(np_n)^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{(1-p_n)^n}{(1-p_n)^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot \frac{e^{-\lambda}}{1^k}.$$

Здесь в последнем переходе мы пользуемся тем, что

$$(1-p_n)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}.$$

Это следует из непрерывности экспоненты в силу того, что

$$n \ln(1-p_n) = -np_n + o(np_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\lambda.$$

□

Случайная величина ξ имеет **геометрическое распределение** с параметром $p \in (0, 1]$, пишут $\xi \sim \text{Geom}(p)$, если

$$P\{\xi = n\} = p(1-p)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пример: при вероятности успеха p количество неудач до первого успеха имеет геометрическое распределение. А какое распределение имеет общее число попыток? Иногда считают, что геометрическое распределение принимает натуральные значения без нуля. Тогда все вероятности нужно сдвинуть.

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$, называются **независимыми** (попарно или в совокупности), если для любых $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}$ события $\{\xi_1 = x_1\}, \{\xi_2 = x_2\}, \dots$ независимы в том же смысле. Иногда пишут $\xi \perp \eta$. По умолчанию обычно подразумевается независимость в совокупности.

Теорема 1.3 (Критерий независимости). Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы в совокупности тогда и только тогда, когда для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ выполнено

$$P\{\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n\} = P\{\xi_1 = x_1\} \cdot \dots \cdot P\{\xi_n = x_n\}.$$

Доказательство. Необходимость данного условия следует из определения, так что нужно доказать достаточность. Для удобства, проведём доказательство для $n = 3$; в общем случае оно аналогично и похоже на доказательство теоремы 1.1. Допустим, мы хотим проверить, что

$$P\{\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2\} = P\{\xi_1 = x_1\} \cdot P\{\xi_2 = x_2\}.$$

Мы знаем, что

$$P\{\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \xi_3 = x_3\} = P\{\xi_1 = x_1\} \cdot P\{\xi_2 = x_2\} \cdot P\{\xi_3 = x_3\}.$$

Суммируя данное равенство по x_3 , получаем требуемое. □

Упражнение 1.С. Для случайных величин независимости попарная и в совокупности взаимосвязаны точно так же, как и для событий.

Упражнение 1.D. Для конечного набора случайных величин независимость в совокупности можно переформулировать ещё так: величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы в совокупности, если для любых $B_1, \dots, B_n \subset \mathbb{R}$

$$P\{\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n\} = P\{\xi_1 \in B_1\} \dots P\{\xi_n \in B_n\}.$$

Упражнение 1.E. Для двух случайных величин, построенных по броскам честных независимых кубиков, найдите распределение их сумм.

Упражнение 1.F. Сумма n независимых бернуллиевских случайных величин имеет распределение $\text{Bin}(n, p)$.

§2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ, ДИСПЕРСИЯ, КОВАРИАЦИЯ

Я точно знаю, что значит масса,
и вечно буду одним из масс

М. Щербаков

Вспомним нашу модель: вероятность является идеализированным понятием частоты, а случайная величина является интерпретацией результатов эксперимента. Если мы проведём эксперимент много раз, логично предположить, что среднее значение интерпретации будет равно среднему взвешенному по всем интерпретациям с весами, равными частоте одного исхода. Это приводит нас к следующему понятию. **Математическим ожиданием** случайной величины $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется

$$\mathbb{E} \xi := \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

(от английского expected value). В русской литературе иногда обозначается как $M\xi$. Чтобы математическое ожидание было конечным, ряд должен сходиться абсолютно. В противном случае рассматривают отдельно положительные и отрицательные слагаемые, и если сходится ровно один из рядов, то полагают $\mathbb{E} \xi = \pm\infty$, где знак берётся как у расходящегося ряда.

В нашем, дискретном, случае математическое ожидание является центром масс системы взвешенных точек на прямой. В общем случае оно является центром масс некоторого неоднородного тела.

Ниже приведём несколько основных свойств математического ожидания.

Утверждение 2.1. Пусть η случайных величин ξ, η конечное математическое ожидание.

- (i) Математическое ожидание линейно, то есть $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$, где $a, b \in \mathbb{R}$.
- (ii) Математическое ожидание монотонно, то есть $\mathbb{E}\xi \leq \mathbb{E}\eta$ при $\xi \leq \eta$.
- (iii) $\mathbb{E}c = c$ для $c \in \mathbb{R}$.
- (iv) $|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$.

Доказательство. Первые три свойства получаются непосредственно из определения, главное не забывать проверять абсолютную сходимость рядов. Последнее следует из монотонности и неравенств $-|\xi| \leq \xi \leq |\xi|$. $\square$

Утверждение 2.2 (формула для расчёта). Для любой случайной величины ξ

$$\mathbb{E} \xi = \sum_{x \in \text{Im } \xi} x P\{\xi = x\},$$

причём сходимость ряда гарантирует существование математического ожидания.

Доказательство. Получается перегруппировкой слагаемых, если один из рядов сходится абсолютно. $\square$

Нетрудно заметить, что $\mathbb{E}\xi\eta$ не всегда равно $\mathbb{E}\xi \mathbb{E}\eta$. Например, для $\xi = \eta \sim \text{Bern}(p)$ это верно только в тривиальных случаях $p \in \{0, 1\}$.

Утверждение 2.3. Для независимых в совокупности случайных величин, у которых определено математическое ожидание, всегда

$$\mathbb{E}(\xi_1 \dots \xi_n) = \mathbb{E} \xi_1 \dots \mathbb{E} \xi_n.$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для $n = 2$. В этом случае по формуле для расчёта

$$\mathbb{E} \xi \eta = \sum_{x,y} xy P\{\xi = x, \eta = y\} = \sum_x x P\{\xi = x\} \sum_y y P\{\eta = y\} = \mathbb{E} \xi \mathbb{E} \eta.$$

□

Важной мерой случайной величины является **дисперсия**, или мера разброса её значений. Дисперсия определяется как

$$\text{Var } \xi := \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E} \xi)^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

(от английского variance). В русской литературе часто обозначается $\mathbb{D} \xi$.

Утверждение 2.4. Пусть η случайной величины ξ определена дисперсия. Тогда

- (i) $\text{Var } \xi = \mathbb{E} \xi^2 - (\mathbb{E} \xi)^2$;
- (ii) $\text{Var}(c\xi) = c^2 \text{Var } \xi$ для $c \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\text{Var } \xi = 0$ равносильно тому, что ξ — константа с вероятностью 1.

Доказательство. Первые два свойства следуют из линейности матожидания. Третье свойство доказывается следующим образом. Очевидно, что $\text{Var } c = 0$. Пусть $\text{Var } \xi = 0$. Тогда $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E} \xi)^2 = 0$, откуда следует, что $\xi - \mathbb{E} \xi = 0$ с вероятностью 1. □

Хочется получить какой-то численный аналог независимости. Так появляется понятие **ковариации** двух случайных величин ξ, η :

$$\text{cov}(\xi, \eta) := \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E} \xi)(\eta - \mathbb{E} \eta)) \in \mathbb{R}$$

(от английского covariance). Нестрого говоря, если величины имеют прямую зависимость, ковариация будет положительной, а если обратную, то отрицательной.

Утверждение 2.5 (формула для расчёта). Для случайных величин, у которых определена ковариация,

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E} \xi \eta - \mathbb{E} \xi \mathbb{E} \eta.$$

Доказательство. Из линейности матожидания. □

Утверждение 2.6. Независимые случайные величины имеют нулевую ковариацию.

Доказательство. По мультипликативности матожидания для независимых случайных величин. □

Упражнение 2.А. Пусть $\Omega = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{4}\}$ с вероятностями исходов $\frac{1}{4}$. Убедитесь, что случайные величины $\sin, \cos$ зависимы, но имеют нулевую ковариацию.

Утверждение 2.7. Ковариация является симметричной и билинейной.

Доказательство. Симметричность очевидна из определения, а билинейность следует из линейности матожидания. □

Утверждение 2.8. Всегда $\text{cov}(\xi, \xi) = \text{Var } \xi$.

Доказательство. По определению. □

Таким образом, ковариация является аналогом скалярного произведения векторов, а дисперсия — квадрата длины. Аналогия очень удачна: для сонаправленных векторов скалярное произведение положительно, для перпендикулярных равно нулю.

Возможно, в школе на уроках физики вы считали погрешности измерений. Если вы делали это правильно, то при сложении двух измерений погрешность суммы вы считали не как сумму погрешностей, а путём сложения квадратов погрешностей, и затем извлекали обратно корень. Все эти действия обосновывает следующая лемма, если иметь в виду, что дисперсия по сути и задаёт квадрат погрешности.

Лемма 2.9. Для величин с попарно нулевой ковариацией дисперсия аддитивна:

$$\text{Var}(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \text{Var} \xi_1 + \dots + \text{Var} \xi_n.$$

В частности, дисперсия аддитивна для попарно независимых величин.

Доказательство. Это следует из билинейности ковариации:

$$\text{Var} \sum_{i=1}^n \xi_i = \text{cov} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i, \sum_{j=1}^n \xi_j \right) = \sum_{i=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_i) + \sum_{i \neq j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i=1}^n \text{Var} \xi_i.$$

□

Упражнение 2.В. Покажите, что для зависимых величин дисперсия может быть неаддитивной. Всегда ли это так?

Допустим, мы получили, что $\text{cov}(\xi, \eta) = 0,001$. Понятно, что величины зависимы, но можно ли сказать, что мера зависимости у них очень мала? Другая ситуация: $\text{cov}(\xi, \eta) = 10000$. Можно ли сказать, что величины сильно зависимы? В обоих случаях ответ отрицательный: очевидно, надо посмотреть, насколько большие значения принимают сами случайные величины. Это подводит к такому определению.

Корреляцией (или *коэффициентом корреляции*) двух случайных величин называется

$$\rho(\xi, \eta) := \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\text{Var} \xi} \sqrt{\text{Var} \eta}}.$$

Величины, имеющие нулевую ковариацию, называют *некоррелированными*.

Теорема 2.10 (Неравенство Коши—Буняковского—Шварца). Для величин ξ, η с конечной дисперсией определена и ковариация, и выполнено

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{\text{Var} \xi} \sqrt{\text{Var} \eta}.$$

Более того, равенство означает, что величины линейно зависимы с вероятностью 1.

Доказательство. Ковариация определена, поскольку $2 \mathbb{E} |\xi \eta| \leq \mathbb{E} \xi^2 + \mathbb{E} \eta^2$. Последнюю часть тоже легко получить из похожих соображений, но мы получим её как следствие из более общего утверждения. □

Следствие 2.11. Коэффициент корреляции всегда лежит на отрезке $[-1, 1]$, причём равенство его ± 1 равносильно тому, что величины линейно зависимы с вероятностью 1.

Таким образом, если ковариация — аналог скалярного произведения, то корреляция — аналог косинуса.

Из случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ можно составить и случайный вектор $\vec{\xi}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. В таком случае прямым обобщением ковариации и дисперсии является *матрица ковариаций* $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с элементами $\Sigma_{ij} = \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$.

Лемма 2.12. Матрица ковариаций симметрична и неотрицательно полуопределена. При этом, нарушение свойства положительной определённости равносильно тому, что с вероятностью 1 компоненты вектора $\vec{\xi}$ линейно зависимы.

Доказательство. Симметричность следует из симметричности ковариации. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Тогда по билинейности ковариации

$$\vec{x}^T \Sigma \vec{x} = \sum_{i,j} x_i x_j \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \text{cov} \left(\sum_i x_i \xi_i, \sum_j x_j \xi_j \right) = \text{Var} \vec{x}^T \vec{\xi} \geq 0.$$

Таким образом, Σ неотрицательно определена. Линейная зависимость равносильна тому, что для некоторого ненулевого вектора $\vec{x}$ выполнено $\vec{x}^T \vec{\xi} = c$. Последнее (с вероятностью 1) равносильно $\text{Var}(\vec{x}^T \vec{\xi}) = 0$, что и означает нарушение положительной определённости. □

§3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ

Для человеческого ума недоступна
совокупность причин явлений. Но
потребность отыскивать причины
вложена в душу человека

Л. Толстой

Мы определили математическое ожидание, идеализируя понятие среднего значения эксперимента. Теперь нас интересует, насколько это идеализированное понятие близко к оригиналу?

Теорема 3.1 (ЗБЧ в форме Чебышёва). Пусть дана последовательность попарно некоррелированных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, у которых математические ожидания совпадают, а дисперсии равномерно ограничены некоторой константой. Тогда для любого $\varepsilon > 0$,

$$P \left\{ \left| \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - \mathbb{E} \xi_1 \right| > \varepsilon \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Иными словами, вероятность отклонения выборочного среднего от истинного среднего стремится к нулю. Говорят, выборочное среднее $\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}$ сходится по вероятности к истинному среднему $\mathbb{E} \xi_1$.

Упражнение 3.А. При тех же ограничениях выполнено

$$P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \xi_1 \right\} = 1.$$

(Здесь существенно, что вероятностное пространство у нас дискретное.)

Теорема 3.2 (Неравенство Маркова). Пусть $\xi \geq 0$ и $a \in (0, +\infty)$. Тогда

$$P\{\xi \geq a\} \leq \frac{\mathbb{E} \xi}{a}.$$

Доказательство. Здесь надо расписывать с другого конца:

$$\mathbb{E} \xi = \sum_{x \in \text{Im } \xi} x P\{\xi = x\} \geq \sum_{x \geq a} x P\{\xi = x\} \geq a \sum_{x \geq a} P\{\xi = x\} = a P\{\xi \geq a\}.$$

□

? Где здесь воспользовались неотрицательностью случайной величины? А положительностью константы?

Физический смысл неравенства Маркова в том, что маленькая случайная величина не может с большой вероятностью принимать большие значения. Смысл следующего неравенства Чебышёва в том, что случайная величина с маленьким разбросом не может с большой вероятностью сильно отклоняться от своего среднего.

Следствие 3.3 (Неравенство Чебышёва). Пусть у случайной величины ξ существует конечное математическое ожидание, и $a \in (0, +\infty)$. Тогда

$$P\{|\xi - \mathbb{E} \xi| \geq a\} \leq \frac{\text{Var } \xi}{a^2}.$$

Доказательство. Надо заметить, что $\{|\xi - \mathbb{E} \xi| \geq a\} = \{|\xi - \mathbb{E} \xi|^2 \geq a^2\}$, и применить неравенство Маркова. □

Доказательство Закона Больших Чисел. Обозначим через $c > 0$ константу, мажорирующую все дисперсии. Обозначим $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$. Тогда по неравенству Чебышёва

$$P \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - \mathbb{E} \xi_1 \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{\text{Var } \frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} \leq \frac{c}{n \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Возникает естественный вопрос о скорости сходимости в Законе Больших Чисел. Оказывается, если отклонения выборочных средних от истинного среднего отнормировать на $\sqrt{n}$, мы получим сходимость к некоторому вероятностному распределению, а не к какой-то константе.

Теорема 3.4 (Центральная Предельная Теорема; б/д). Пусть дана последовательность независимых (в совокупности) одинаково распределённых случайных величин с ограниченными математическим ожиданием и дисперсией. Обозначим $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$. Тогда для любых $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$,

$$\mathbb{P} \left\{ a \leq \frac{S_n - \mathbb{E} S_n}{\sqrt{\text{Var } S_n}} \leq b \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Предельное распределение нельзя описать в рамках дискретных вероятностных пространств. Более того, на дискретном вероятностном пространстве данная теорема бесполезна (или по крайней мере нуждается в корректировке) ввиду следующего результата.

Утверждение 3.5. На дискретном вероятностном пространстве любая последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин является последовательностью констант (с вероятностью 1).

Доказательство. Рассмотрим любую такую последовательность $\{\xi_n\}$ и предположим, что случайные величины в ней имеют невырожденное распределение. Заметим, что, поскольку ряд (или конечная сумма) $\sum_{x \in \text{Im } \xi_1} \mathbb{P}\{\xi_1 = x\}$ сходится и равен 1, то существует некоторое $p < 1$, мажорирующее сверху все вероятности $\mathbb{P}\{\xi_1 = x\}$.

Зафиксируем произвольное $\omega \in \Omega$. Наша цель показать, что её вероятность равна нулю, что приведёт к противоречию. Для каждого n положим $x_n := \xi_n(\omega)$. Остаётся оценить сверху

$$\mathbb{P}(\omega) \leq \mathbb{P}\{\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n\} \leq p^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

что приводит к противоречию. □

Таким образом, чтобы строить такие последовательности, нужно уметь строить более сложные вероятностные пространства. Вас научат это делать в будущих курсах. По сути, далее мы как раз переходим к изучению недискретных вероятностных пространств.

Сформулированный нами ЗБЧ, тем не менее, интересен даже на дискретных пространствах ввиду следующего результата.

Упражнение 3.В. Рассмотрим $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ с вероятностью $\mathbb{P}(\omega) = 2^{-\omega}$. Построим случайные величины

$$\xi_n(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{если } \omega = 2n - 1, \\ -2, & \text{если } \omega = 2n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Убедитесь, что они попарно некоррелируемы, имеют одинаковое математическое ожидание и ограниченные дисперсии.

Далее до конца этой темы идёт факультативный материал.

Теперь обсудим оценки скорости сходимости в теореме Пуассона 1.2.

Теорема 3.6. Пусть $\xi_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$, и $np_n = \lambda + O(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$ и $0 < \lambda < \infty$. Пусть $\eta \sim \text{Pois}(\lambda)$. Тогда для любого множества $B \subset \mathbb{R}$ выполнено

$$|\mathbb{P}\{\xi_n \in B\} - \mathbb{P}\{\eta \in B\}| = O(1/n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Эту теорему можно доказывать разными способами. Мы получим её как следствие из двух следующих теорем. Отметим, что, если $np_n = \lambda$, то можно уточнить оценку (теорема 3.11):

$$|\mathbb{P}\{\xi_n \in B\} - \mathbb{P}\{\eta \in B\}| \leq np_n^2 = \frac{\lambda^2}{n}.$$

Следующая теорема утверждает, что оценку можно ещё более улучшить, если подкорректировать параметр в распределении Пуассона.

Теорема 3.7. Пусть $\xi \sim \text{Bin}(n, p)$ и $\eta \sim \text{Pois}(-n \ln(1 - p))$. Тогда для любого множества $B \subset \mathbb{R}$ выполнено

$$|\mathbb{P}\{\xi \in B\} - \mathbb{P}\{\eta \in B\}| \leq np^2 \cdot \frac{1+p}{2}.$$

Теорема 3.8. Пусть $\xi \sim \text{Pois}(\lambda)$ и $\eta \sim \text{Pois}(\mu)$. Тогда для любого множества $B \subset \mathbb{R}$ выполнено

$$|\mathbb{P}\{\xi \in B\} - \mathbb{P}\{\eta \in B\}| \leq |\lambda - \mu|.$$

Доказательство теоремы 3.6. Положим $\mu_n := -n \ln(1 - p_n)$ и $\zeta_n \sim \text{Pois}(\mu_n)$. По теореме 3.7,

$$|\mathbb{P}\{\xi_n \in B\} - \mathbb{P}\{\zeta_n \in B\}| \leq np_n^2 \cdot \frac{1+p_n}{2} \leq \frac{\lambda^2}{n} + O(1/n^2) = O(1/n).$$

Кроме того,

$$\mu_n = -n \ln \left(1 - \frac{\lambda}{n} + O(1/n^2) \right) = \lambda + O(1/n),$$

откуда теореме 3.8,

$$|\mathbb{P}\{\eta \in B\} - \mathbb{P}\{\zeta_n \in B\}| \leq |\mu_n - \lambda| = O(1/n).$$

Собирая всё вместе по неравенству треугольника, завершаем доказательство теоремы. $\square$

Доказательство теоремы 3.7. Заметим, что

$$|\mathbb{P}\{\xi \in B\} - \mathbb{P}\{\eta \in B\}| \leq \mathbb{P}(\{\xi \in B\} \triangle \{\eta \in B\}) \leq \mathbb{P}\{\xi \neq \eta\}.$$

Таким образом, достаточно оценить сверху последнюю вероятность.

Положим $r := -\ln(1 - p)$ и рассмотрим независимые случайные величины $\eta_j \sim \text{Pois}(r)$ для $j = 1, \dots, n$. Определим независимые $\xi_j \sim \text{Bern}(p)$ как

$$\xi_j := \min(\eta_j, 1).$$

Для них выполнено

$$\mathbb{P}\{\xi_j \neq \eta_j\} = \mathbb{P}\{\eta_j \geq 2\} = 1 - e^{-r} - re^{-r} = 1 - (1-p) - (1-p) \ln(1-p) \leq p + (1-p)(-p - p^2/2) = p^2 \cdot \frac{1+p}{2}.$$

Поскольку нас интересуют только сами распределения величин ξ, η , а не то, как они зависят друг от друга, то можно считать, что выполняются соотношения

$$\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \quad \text{и} \quad \eta = \sum_{j=1}^n \eta_j.$$

Из них получаем

$$\mathbb{P}\{\xi \neq \eta\} \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n \{\xi_j \neq \eta_j\}\right) \leq np^2 \cdot \frac{1+p}{2},$$

что завершает доказательство. $\square$

Доказательство теоремы 3.8 через замену вероятностного пространства. Можно считать, что $\lambda = \mu + \lambda'$, где $\lambda' > 0$. Поскольку нас интересуют только вероятности, можно считать, что $\xi = \eta + \xi'$, где $\xi' \sim \text{Pois}(\lambda')$. А тогда по рассуждению в доказательстве выше для любого $B \subset \mathbb{R}$ получаем оценку

$$|\mathbb{P}\{\xi \in B\} - \mathbb{P}\{\eta \in B\}| \leq \mathbb{P}\{\xi \neq \eta\} = \mathbb{P}\{\xi' \neq 0\} = 1 - e^{-\lambda'} \leq \lambda'.$$

Последнее неравенство здесь можно обосновать через неравенство Маркова:

$$\mathbb{P}\{\xi' \neq 0\} = \mathbb{P}\{\xi' \geq 1\} \leq \mathbb{E} \xi' = \lambda'.$$

$\square$

Доказательство теоремы 3.8 через теорему о среднем. Зафиксируем множество $B \subset \mathbb{R}$ и определим функцию $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ как

$$f(\lambda) := \mathbb{P}\{\xi \in B\} = \sum_{n \in B \cap \mathbb{N}} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

Дифференцируя по λ (в силу равномерной сходимости рядов на любом компакте), получаем

$$f'(\lambda) = \sum_{n \in B \cap \mathbb{N}} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} - f(\lambda).$$

Поскольку оба слагаемых суть вероятности, то

$$|f'(\lambda)| \leq 1.$$

Отсюда по теореме Лагранжа о среднем получаем, что

$$|f(\lambda) - f(\mu)| \leq |\lambda - \mu|,$$

что и требовалось. $\square$

Здесь же интересно обсудить другие оценки сходимости биномиального закона, в духе Центральной Предельной Теоремы. Тут нужно сделать некоторые приготовления. Определим

$$p^* := \frac{k}{n}.$$

Положим

$$H(x) := x \ln \frac{x}{p} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-p}.$$

По сути, $H(x)$ является *расхождением Кульбака–Лейблера* между распределениями $\text{Bern}(x)$ и $\text{Bern}(p)$.

Теорема 3.9. Пусть $\xi_n \sim \text{Bin}(n, p)$. При $k \rightarrow \infty$ и $n - k \rightarrow \infty$ выполнено

$$\mathbb{P}\{\xi_n = k\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}} e^{-nH(p^*)}.$$

Прежде чем доказывать, поймём, что в знаменателе под корнем по сути написана дисперсия закона $\text{Bern}(p^*)$. То есть, грубо говоря, мы оцениваем вероятность где-то в середине большого биномиального горба величиной, зависящей только от p^* . И чем больше расхождение Кульбака–Лейблера, тем больше экспоненциальная поправка к этой вероятности.

Доказательство теоремы 3.9. Пользуясь формулой Стирлинга

$$m! \sim \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m, \quad m \rightarrow \infty,$$

имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\xi_n = k\} &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}} \cdot \left(\frac{p}{p^*}\right)^k \cdot \left(\frac{1-p}{1-p^*}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

Остаётся заметить, что

$$\left(\frac{p}{p^*}\right)^k = e^{-k \ln \frac{p^*}{p}} = e^{-np^* \ln \frac{p^*}{p}},$$

и аналогично разобраться с другим сомножителем. $\square$

При дополнительных ограничениях на скорость роста отсюда можно получить следующий результат.

Следствие 3.10 (Локальная теорема Муавра—Лапласа). Пусть $\xi_n \sim \text{Bin}(n, p)$. Пусть $n(p^* - p) = k - np = o(n^{2/3})$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$P\{\xi_n = k\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{n}{2p(1-p)}(p^*-p)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}.$$

Если полученное выражение просуммировать по k , то по сути получится интеграл, написанный в Центральной Предельной Теореме. Этот факт называется интегральной теоремой Муавра—Лапласа, который мы всё-таки оставляем без доказательства.

Доказательство следствия. Понятно, что $p^* \sim p$, а тогда

$$\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)} \sim \sqrt{2\pi np(1-p)}.$$

Остаётся разобраться с экспонентой.

Нетрудно проверить, что

$$H'(x) = \ln \frac{x}{p} - \ln \frac{1-x}{1-p} \quad \text{и} \quad H''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)}.$$

Отсюда $H(p) = H'(p) = 0$. Тогда, раскладывая функцию H по формуле Тейлора в окрестности точки p , с учётом $p^* \rightarrow p$ получаем

$$H(p^*) = \frac{1}{2} H''(p) \cdot (p^* - p)^2 + O(|p^* - p|^3) = \frac{1}{2p(1-p)} \cdot (p^* - p)^2 + O(|p^* - p|^3)$$

Из $n(p^* - p) = o(n^{2/3})$ имеем $n(p^* - p)^3 = o(1)$, а потому

$$nH(p^*) = \frac{n}{2p(1-p)}(p^* - p)^2 + o(1),$$

что завершает доказательство. □

Прежде чем переходить к рассмотрению сложных пространств и построению меры в общем случае, посмотрим, как бы нам хорошо жилось, если бы мы умели работать не с дискретными вероятностными пространствами.

Теорема 3.11. Пусть $\xi \sim \text{Bin}(n, p)$, где $np = \lambda > 0$. Пусть $\eta \sim \text{Pois}(\lambda)$. Тогда для любого множества $B \subset \mathbb{R}$ выполнено

$$|P\{\xi_n \in B\} - P\{\eta \in B\}| \leq np^2 = \frac{\lambda^2}{n}.$$

Доказательство. Рассмотрим вероятностное пространство $\Omega = [0, 1]^n$ с геометрической вероятностью. Для $i = 1, \dots, n$ зададим случайные величины

$$\xi_i(\omega) := \begin{cases} 0, & \text{если } \omega_i < 1-p, \\ 1, & \text{если } \omega_i \geq 1-p, \end{cases}$$

и

$$\eta_i(\omega) := \begin{cases} 0, & \text{если } \omega_i < \pi_0 = e^{-p}, \\ k, & \text{если } \pi_{k-1} \leq \omega_i < \pi_k, \end{cases}$$

где $\pi_k := \sum_{m=0}^k \frac{p^m}{m!} e^{-p}$. Нетрудно понять, что $\xi_i \sim \text{Bern}(p)$ независимы между собой, и аналогично $\eta_i \sim \text{Pois}(p)$. Опять же, поскольку нас интересуют только сами распределения величин ξ, η , то можно считать, что выполняются соотношения

$$\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \quad \text{и} \quad \eta = \sum_{j=1}^n \eta_j.$$

Кроме того, так как $1-p < e^{-p}$, то $\xi_i(\omega) \neq \eta_i(\omega)$ равносильно тому, что

$$\omega_i \in [1-p, e^{-p}) \sqcup [\pi_1, 1],$$

откуда

$$P\{\xi_i \neq \eta_i\} = (e^{-p} - (1 - p)) + (1 - e^{-p} - pe^{-p}) = p(1 - e^{-p}) < p^2.$$

В итоге

$$|P\{\xi \in B\} - P\{\eta \in B\}| \leq P\{\xi \neq \eta\} \leq P\left(\bigcup_{j=1}^n \{\xi_j \neq \eta_j\}\right) < np^2 = \frac{\lambda^2}{n}.$$

□

§4. СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВ

One Ring to rule them all

Классика

Здесь и далее всегда через Ω обозначено некоторое непустое множество. Напомним, что значком $\sqcup$ обозначаем операцию объединения множеств, применяемую только к попарно дизъюнктным (то есть попарно непересекающимся) множествам.

Полукольцом называется такая непустая (вообще говоря, далее системы всегда будут подразумеваться непустыми, поэтому мы будем опускать такие тривиальности) система $\mathcal{S} \subset 2^\Omega$ (от англ. semiring) подмножеств, что

1. $A \cap B \in \mathcal{S}$ для любых $A, B \in \mathcal{S}$ (то есть полукольцо замкнуто относительно конечных пересечений),
2. для любых $A, B \in \mathcal{S}$ найдутся такие $n \geq 1$ и $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$, что $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$.

Примеры: всё 2^Ω , система полуинтервалов $[a, b) \subset [0, 1)$, система всевозможных промежутков на отрезке.

Упражнение 4.А. В полукольце обязательно лежит пустое множество.

Упражнение 4.В. В определении полукольца второе свойство можно заменить на такое свойство: для любых таких $A, A_1 \in \mathcal{S}$, что $A_1 \subset A$, найдутся такие $n \geq 2$ и такие элементы $A_2, \dots, A_n \in \mathcal{S}$, что $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$.

Упражнение 4.С. Является ли система треугольников на плоскости полукольцом? Как нужно поменять определение, чтобы эта система стала полукольцом?

Полукольцо называется **полуалгеброй**, если в нём лежит **единица**: множество, содержащее любой другой элемент полукольца в качестве подмножества. Зачастую единицей оказывается всё Ω . (Будьте осторожны, в некоторых источниках требуют лишь чтобы в полуалгебре единица разбивалась на конечное объединение множеств из полуалгебры, но не требуют, чтобы и сама единица там лежала.)

Кольцом называется система $\mathcal{R} \subset 2^\Omega$ (от англ. ring), замкнутая относительно конечных пересечений и симметрической разности; то есть это такая система, что $A \cap B \in \mathcal{R}$ и $A \Delta B \in \mathcal{R}$ для любых $A, B \in \mathcal{R}$. Примеры: всё 2^Ω , система конечных объединений промежутков на отрезке; обратите внимание, что полукольцо полуинтервалов не будет являться кольцом (кроме тривиального случая).

Утверждение 4.1. (i) Кольцо замкнуто относительно конечного объединения и вычитания.

(ii) Кольцо является полукольцом.

Доказательство. Утверждение (i) следует из того, что $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$ и $A \setminus B = (A \cup B) \Delta B$. Утверждение (ii) следует из предыдущего. □

Упражнение 4.Д. Покажите, что если система множеств замкнута относительно пересечения и объединения, она может ещё не являться кольцом. Но если она замкнута ещё относительно вычитания, то это кольцо.

Алгеброй называется кольцо с единицей. Из предыдущего следует, что алгебра является и полуалгеброй. Таким образом, алгебра замкнута относительно всех конечных теоретико-множественных операций, включая взятие дополнения.

Упражнение 4.Е. Алгеброй является система множеств, содержащая единицу, и замкнутая относительно конечного пересечения и дополнения (до единицы).

Утверждение 4.2. Над любой системой $\mathcal{X}$ множеств найдётся наименьшая (по включению) кольцо/алгебра. Говорят, что эта наименьшая система порождена системой $\mathcal{X}$.

Доказательство. Можно считать, что $\mathcal{X}$ является системой подмножеств множества $\Omega := \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$. Таким образом, по крайней мере одно кольцо (и оно же алгебра) над $\mathcal{X}$ найдётся: всё 2^Ω . Далее рассмотрим множество Δ всех колец/алгебр над $\mathcal{X}$, которое по доказанному непусто. Рассмотрим пересечение $\bigcap_{D \in \Delta} D$ всех этих колец/алгебр. В качестве упражнения предлагается проверить, что оно является искомой системой. $\square$

Следующая лемма утверждает, что для полуколец мы даже можем конструктивно предъявить минимальное кольцо, построив его «руками» из «кирпичиков» полукольца.

Лемма 4.3. Наименьшее кольцо над полукольцом $\mathcal{S}$ в точности равно

$$R(\mathcal{S}) := \left\{ \bigsqcup_{k=1}^n A_k : n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S} \right\}.$$

Для доказательства потребуется следующий вспомогательный факт.

Утверждение 4.4 (Эквивалентное определение полукольца). Пусть $A, B_1, \dots, B_n$ суть элементы полукольца $\mathcal{S}$. Тогда существует такое $m \in \mathbb{N}$ и такие элементы $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S}$, что

$$A \setminus B_1 \setminus \dots \setminus B_n = \bigsqcup_{k=1}^m A_k.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное полукольцо $\mathcal{S}$. Доказательство индукцией по n . База $n = 1$ является определением полукольца. Докажем переход от n к $n+1$. Применив предположение индукции, получаем множества $A_1, \dots, A_m$. Далее по определению каждое из множеств $A_1 \setminus B_{n+1}, \dots, A_m \setminus B_{n+1}$ разбивается на дизъюнктное объединение элементов полукольца. $\square$

Доказательство леммы 4.3. Обозначим через $\mathcal{R}$ минимальное кольцо над полукольцом $\mathcal{S}$. Включение $\mathcal{R} \supset R(\mathcal{S})$ очевидно, поскольку любое кольцо над $\mathcal{S}$ включает в себя $R(\mathcal{S})$ как подсистему. Докажем включение $\mathcal{R} \subset R(\mathcal{S})$. То есть нужно доказать, что $R(\mathcal{S})$ является кольцом.

Неформально, нужно доказать, что при пересечении и симметрической разности «склейки кирпичиков» получается более мелкая «склейка кирпичиков». Формально, нужно доказать, что $R(\mathcal{S})$ замкнуто относительно пересечения и симметрической разности. Рассмотрим

$$A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k \quad \text{и} \quad B = \bigsqcup_{s=1}^m B_s,$$

где A_k, B_s суть элементы полукольца. Замкнутость относительно пересечения очевидна, поскольку

$$A \cap B = \bigsqcup_{k,s} (A_k \cap B_s)$$

и поскольку полукольцо замкнуто относительно пересечения (то есть все $A_k \cap B_s$ лежат в полукольце). Для замкнутости относительно симметрической разности нужно проверить следующий трюк: по утверждению 4.4 найдутся такие элементы $A_{k,i}$ и $B_{s,j}$ полукольца (где индексы i, j пробегает множества значений, зависящие от k, s соответственно), что

$$A_k \setminus B_1 \setminus \dots \setminus B_m = \bigsqcup_i A_{k,i} \quad \text{для всех} \quad k = 1, \dots, n,$$

и

$$B_s \setminus A_1 \setminus \dots \setminus A_n = \bigsqcup_j B_{s,j} \quad \text{для всех} \quad s = 1, \dots, m.$$

Теперь

$$A \triangle B = \left(\bigsqcup_{k,i} A_{k,i} \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{s,j} B_{s,j} \right).$$

□

В будущем нам понадобится следующее умение раскладывать произвольные элементы полукольца на «кирпичики» из некоего общего набора.

Утверждение 4.5 («Об общих кирпичиках»). Пусть $A_1, \dots, A_n$ суть произвольные элементы полукольца $\mathcal{S}$. Тогда существуют такие попарно дизъюнктные элементы $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{S}$, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ найдётся такое $\Gamma_i \subset \{1, \dots, m\}$, что

$$A_i = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_i} B_\gamma.$$

Доказательство. Доказательство индукцией по n . База $n = 1$ очевидна: берём $m = 1$ и $B_1 = A_1$. Для перехода $n \rightarrow n+1$ применим предположение индукции для множеств $A_1, \dots, A_n$; нам дадут некоторые множества $B_1, \dots, B_m$. По утверждению 4.4, существует разбиение

$$A_{n+1} \setminus B_1 \setminus \dots \setminus B_m = \bigsqcup_j D_j.$$

Каждое из множеств $B_s \setminus A_{n+1}$ подразобьём по определению полукольца; получим некоторые множества $B_{s,i}$. В итоге множества $B_{s,i}$, D_j и $A_{n+1} \cap B_s$ — и есть искомые. □

Как мы увидим позже, нам нужно уметь не просто применять теоретико-множественные операции к элементам наших систем множеств; нам нужно уметь переходить к счётным операциям. Это приводит нас к следующим понятиям: **δ -кольцом** называется кольцо, замкнутое относительно счётного пересечения; **σ -кольцом** называется кольцо, замкнутое относительно счётного объединения. Аналогичным образом можно определить **δ -алгебру** и **σ -алгебру**.

Упражнение 4.Ф. Понятия δ -алгебры и σ -алгебры совпадают. Понятия же δ -кольца и σ -кольца в общем случае не эквивалентны.

Упражнение 4.Г. Над любой системой множеств существуют наименьшие σ -кольцо и σ -алгебра, порождённые ею.

Для системы множеств $\mathcal{X}$ наименьшее σ -кольцо, порождённое ею, будем обозначать $\sigma(\mathcal{X})$. Так же будем обозначать порождённую σ -алгебру, если понятно, что выступает в роли единицы.

Пример: *борелевской σ -алгеброй* прямой называется σ -алгебра, порождённая открытыми множествами — то есть, наименьшая σ -алгебра, содержащая все открытые подмножества прямой.

Упражнение 4.Н. Борелевскую σ -алгебру можно породить системой интервалов.

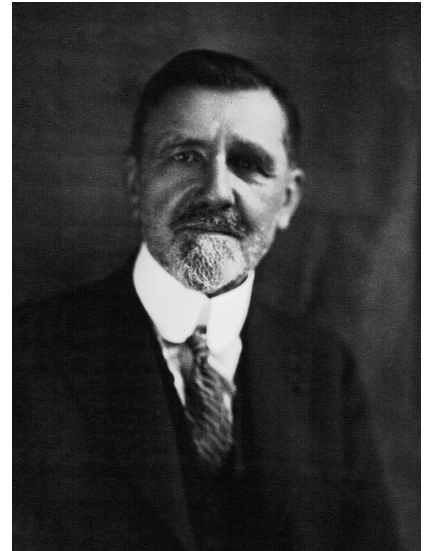


Рис. 1. Эмиль Борель (полное имя Феликс Эдуард Жюстен Эмиль Борель), 07.01.1871–03.02.1956. Французский математик. Некоторый вклад в математику: σ -алгебра и мера Бореля, лемма Гейне—Бореля, лемма Бореля—Кантелли

§5. МЕРА

Est modus in rebus
Крылатое выражение

В вещах он ценит атрибут,
но также чтит и модус
М. Щербаков

На полукольце $\mathcal{S}$ **мерой** (англ. measure) $m: \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty)$ называется *аддитивное отображение*, то есть такое, что

$$m\left(\bigsqcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n m(A_k), \quad \text{как только } A_1, \dots, A_n, \bigsqcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{S}.$$

Понятно, что мера пустого множества обязательно равна нулю.

Упражнение 5.А. Мера на полукольце монотонна, то есть, $m(A) \leq m(B)$ для любых $A, B \in \mathcal{S}$, $A \subset B$.

Обратите внимание, что даже для строгого включения нельзя написать строгое неравенство. Отображение $m: \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty)$ называется *субаддитивным*, если

$$m(A) \leq \sum_{k=1}^n m(A_k), \quad \text{как только } A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S} \text{ и } A \subset \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

и *супераддитивным*, если

$$m(A) \geq \sum_{k=1}^n m(A_k), \quad \text{как только } A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S} \text{ и } A \supset \bigsqcup_{k=1}^n A_k.$$

Иногда субаддитивность называют *полуаддитивностью*. Мы не будем так делать, чтобы не путаться с супераддитивностью. Кроме того, стоит отметить, что субаддитивными бывают и числовые функции. А именно, числовая функция f является субаддитивной, если $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$; например, квадратный корень является субаддитивной функцией. Аналогично, супераддитивной называется функция, для которой $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$.

Утверждение 5.1. Мера на полукольце является субаддитивной и супераддитивной.

Доказательство. Обозначим через m меру на полукольце $\mathcal{S}$. Рассмотрим произвольные элементы $A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$. Применим к ним утверждение 4.5 «об общих кирпичах». Получим некоторые множества $B_1, \dots, B_r$ и множества $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \subset \{1, \dots, r\}$. Теперь супераддитивность следует из того, что

$$m(A) = \sum_{\gamma \in \Gamma} m(B_\gamma) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{\gamma \in \Gamma_i} m(B_\gamma) = \sum_{i=1}^n m(A_i),$$

а субаддитивность следует из того, что

$$m(A) = \sum_{\gamma \in \Gamma} m(B_\gamma) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{\gamma \in \Gamma_i} m(B_\gamma) = \sum_{i=1}^n m(A_i).$$

Понятно, что условия на A_i различны для суб- и супер- аддитивности. □

Кажется, что понятия субаддитивности и супераддитивности какие-то бестолковые. На самом деле, помимо того, что с ними удобно доказывать некоторые свойства меры, они интересны и сами по себе. Например, ввиду следующего утверждения.

Утверждение 5.2. Пусть отображение $m: \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty)$ на кольце $\mathcal{R}$ субаддитивно. Тогда для любых $A, B \in \mathcal{R}$ выполнено

$$|m(A) - m(B)| \leq m(A \triangle B).$$

Доказательство. Следует из того, что $A \subset B \cup (A \triangle B)$, и наоборот. $\square$

Мера называется **σ -аддитивной** (иногда говорят *счётно-аддитивной*), если дополнительно к свойству аддитивности требуется аналогичное свойство для счётных объединений, то есть

$$m\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k), \quad \text{как только } A_1, \dots, A_n, \dots, \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}.$$

Аналогично можно определить понятия *счётной субаддитивности* и *счётной супераддитивности*. Нетрудно понять, что из σ -аддитивности следует конечная аддитивность, поскольку можно брать A_n пустыми начиная с некоторого номера; аналогично со свойствами супер- и суб- аддитивности.

В некоторой литературе «мерой» называют именно σ -аддитивное отображение на σ -алгебре, а отображение на полукольце называют предмерой (англ. premeasure). В нашем курсе мы все конечно-аддитивные отображения называем мерами (дабы подчеркнуть, что в них больше сходства, чем различия), а область определения и свойство σ -аддитивности каждый раз либо указываются явно, либо следуют из контекста.

Утверждение 5.3. Мера на полукольце является счётно супераддитивной.

Доказательство. Это легко следует из обычной супераддитивности и из того факта, что если $a_n \leq c$, то и $\lim a_n \leq c$. $\square$

Лемма 5.4. Для меры на полукольце понятия счётной аддитивности и счётной субаддитивности равносильны.

Доказательство. Из счётной субаддитивности следует σ -аддитивность в силу того, что счётная супераддитивность меры уже доказана. Покажем, что из σ -аддитивности следует счётная субаддитивность. Каждое A_n заменим на его пересечение с A , это только уменьшит (точнее, не увеличит) сумму ряда $\sum m(A_n)$. Теперь по утверждению 4.4 для каждого n существует разбиение

$$A_n \setminus A_1 \setminus \dots \setminus A_{n-1} = \bigsqcup_i B_{n,i}$$

на элементы полукольца, причём множества $B_{n,i}$ попарно дизъюнкты при различных n . Теперь

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n,i} B_{n,i},$$

откуда

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i m(B_{n,i}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

$\square$

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос продолжения меры: а именно, по мере, построенной на некоторой системе множеств, мы хотим научиться строить меру, построенную по более богатой системе множеств. В следующей лемме мы делаем первый шаг для этого, построив продолжение ν меры m .

Лемма 5.5. Пусть $m: \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty)$ является мерой на полукольце, и $R(\mathcal{S})$ — порождённое кольцо. Тогда существует единственное продолжение меры m до меры $\nu: R(\mathcal{S}) \rightarrow [0, +\infty)$, то есть существует единственная мера $\nu: R(\mathcal{S}) \rightarrow [0, +\infty)$, совпадающая с m на $\mathcal{S}$. Более того, если мера m была σ -аддитивна, то продолжение ν тоже будет σ -аддитивной мерой (в таком случае говорят, что σ -аддитивность наследуется при продолжении меры).

Доказательство. Из леммы 4.3 известно, что любой элемент $A \in R(\mathcal{S})$ представим в виде $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$, где $A_k \in \mathcal{S}$. Тогда, поскольку $\nu|_{\mathcal{S}} = m$ и ν аддитивна, то единственный способ определить ν это

$$\nu(A) := \sum_{k=1}^n m(A_k).$$

Неужели лемма доказана? Нет, нам сначала нужно доказать корректность построения (а потом ещё аддитивность полученного отображения). Допустим, оказалось, что имеется другое представление $A = \bigsqcup_{s=1}^r B_s$ в виде объединения элементов из полукольца. Тогда равенство

$$\sum_{k=1}^n m(A_k) = \sum_{s=1}^r m(B_s)$$

следует из утверждения 4.5 «об общих кирпичках», что и доказывает корректность определения.

Докажем, что ν аддитивна (таким образом, она будет являться мерой). Рассмотрим элементы $R_1, \dots, R_n \in R(\mathcal{S})$ и обозначим $R := \bigsqcup_{k=1}^n R_k \in R(\mathcal{S})$. Для каждого из множеств R_k есть представление в виде конечного дизъюнктного объединения элементов $A_{k,j}$ из полукольца, соответственно. Тогда

$$\nu(R) = \sum_k \sum_j m(A_{k,j}) = \sum_k \nu(R_k).$$

Таким образом, мы показали, что мера с полукольца продолжается единственным образом на наименьшее кольцо.

Осталось показать наследование σ -аддитивности. Для этого достаточно в предыдущем рассуждении сказать, что k теперь пробегает счётное число значений, а j всё ещё конечное. Рассмотрев разбиение множества R на конечное дизъюнктное объединение элементов A_i из полукольца, имеем

$$\nu(R) = \sum_i m(A_i) = \sum_{i,k,j} m(A_i \cap A_{k,j}) = \sum_{k,j} m(A_{k,j}) = \sum_k \nu(R_k),$$

где второе равенство следует из σ -аддитивности меры m , а третье — из того, что ряд по k сходится абсолютно. $\square$

Важным свойством меры является непрерывность. Мера m называется **непрерывной снизу**, если

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n), \quad \text{где } A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

и мера определена для всех множеств. Говорят, что множества A_n *возрастают* к A , и иногда пишут $A = \lim_n A_n$, что объясняет термин непрерывность.

Лемма 5.6. *Для меры на кольце понятия σ -аддитивности и непрерывности снизу равносильны. Для меры на полукольце из σ -аддитивности следует непрерывность, а обратное не всегда верно.*

Доказательство. Контрпример, показывающий, что из непрерывности не следует σ -аддитивность, таков. Рассмотрим полуалгебру $\{\langle a, b \rangle \cap \mathbb{Q} : a, b \in [0, 1]\}$ и меру $m(\langle a, b \rangle \cap \mathbb{Q}) := b - a$. Нетрудно проверить, что мера непрерывна. Однако она не является σ -аддитивной, поскольку мера каждой рациональной точки равна нулю, а при этом вся единица разбивается в счётное объединение рациональных точек внутри.

Докажем, что из σ -аддитивности на полукольце следует непрерывность снизу. Рассмотрим σ -аддитивную меру m на полукольце $\mathcal{S}$. Пусть множества $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ суть элементы полукольца, возрастающие к элементу $A \in \mathcal{S}$. По определению полукольца, для каждого n (полагая $A_0 = \emptyset$) существуют конечные разбиения

$$A_n \setminus A_{n-1} = \bigsqcup_i B_{n,i}$$

на элементы из полукольца. Теперь

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i m(B_{n,i}) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n).$$

Осталось показать, что из непрерывности снизу на кольце следует σ -аддитивность. Рассмотрим непрерывную меру ν на кольце $\mathcal{R}$ и множество $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, где все A_n тоже элементы кольца. Рассмотрим множества $B_n := \bigsqcup_{k=1}^n A_k$. Они возрастают к A , и поэтому

$$\nu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \nu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k).$$

□

Мера m называется **непрерывной сверху**, если

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n), \quad \text{где } A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

и мера определена для всех множеств. Говорят, что множества A_n *убывают* к A , и иногда пишут $A = \lim_n A_n$. Если $A = \emptyset$, говорят «убывание к нулю», и «непрерывность в нуле».

Лемма 5.7. *Для меры на кольце понятия σ -аддитивности и непрерывности сверху равносильны. Для меры на полукольце из σ -аддитивности следует непрерывность, а обратное не всегда верно.*

Доказательство. Контрпример, показывающий, что из непрерывности не следует σ -аддитивность, такой же.

Докажем, что из σ -аддитивности на полукольце следует непрерывность сверху. Рассмотрим σ -аддитивную меру m на полукольце $\mathcal{S}$. Пусть множества $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ суть элементы полукольца, убывающие к элементу A . По определению полукольца, для каждого n существуют конечные разбиения

$$A_n \setminus A_{n+1} = \bigsqcup_i B_{n,i}$$

на элементы из полукольца. Теперь

$$m(A_1) - m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i m(B_{n,i}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sum_i m(B_{n,i}) = m(A_1) - \lim_{N \rightarrow \infty} m(A_N).$$

Осталось показать, что из непрерывности сверху на кольце следует σ -аддитивность. Рассмотрим непрерывную меру ν на кольце $\mathcal{R}$ и множество $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, где все A_n тоже элементы кольца. Рассмотрим множества $B_n := A \setminus \bigsqcup_{k=1}^{n-1} A_k$. Они убывают к пустому множеству, и поэтому

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(B_n) = \nu(A) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \nu(A_k) = \nu(A) - \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k).$$

□

На первый взгляд кажется, что понятия непрерывности сверху и снизу равносильны; позже мы увидим, что это не всегда так (а именно, равносильность нарушается на бесконечных мерах).

§6. ВНЕШНЯЯ МЕРА И ИЗМЕРИМОСТЬ ПО ЛЕБЕГУ

Бывший муж — не муж,
а внешняя мера — не мера.

Эрлих И. Г.

Зафиксируем σ -аддитивную меру m на полуалгебре $\mathcal{S}$ подмножеств множества Ω . Мы уже умеем продолжать её на порождённую алгебру, но теперь мы хотим продолжить её на нечто большее.

Внешняя мера Жордана $\mu_J^*: 2^\Omega \rightarrow [0, +\infty)$ определяется как

$$\mu_J^*(A) := \inf_{\substack{A_1, \dots, A_N \in \mathcal{S} \\ \bigcup_{n=1}^N A_n \supset A}} \sum_{n=1}^N m(A_n).$$

Внешняя мера Лебега $\mu^*: 2^\Omega \rightarrow [0, +\infty)$ определяется как

$$\mu^*(A) := \inf_{\substack{A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S} \\ \bigcup_{n=1}^\infty A_n \supset A}} \sum_{n=1}^\infty m(A_n).$$

Обратите внимание, что в обоих случаях внешняя мера — не мера!

Упражнение 6.А. Внешние меры монотонны.

Лемма 6.1. Сужения обеих внешних мер на порождённую алгебру совпадают с продолжением меры на эту алгебру.

Доказательство. Итак, рассмотрим $A \in R(\mathcal{S})$. Нужно доказать, что $\mu^*(A) = \mu_J^*(A) = \nu(A)$. Поскольку $A = \bigsqcup_{n=1}^N A_n$, где $A_n \in \mathcal{S}$, то отсюда следует, что $\mu_J^*(A) \leq \nu(A)$. Неравенство в другую сторону следует из (счётной) субаддитивности меры ν . $\square$

Таким образом, мы снова построили продолжение меры на порождённую алгебру.

В дальнейшем мы будем рассматривать только меру Лебега, потому что хотим построить σ -аддитивную меру; а как покажет следующий пример, с мерой Жордана такое в общем случае не получится сделать.

Пример. На полуалгебре промежутков на $[0, 1]$ введём классическую меру, равную длине промежутка. Рассмотрим множество рациональных точек. Его внешняя мера Жордана равна 1 (что нарушает свойство σ -аддитивности), в то время как его внешняя мера Лебега равна 0 (как и должно быть).

Упражнение 6.В. Внешняя мера Жордана (и Лебега) субаддитивна.

Далее мы рассматриваем внешнюю меру только Лебега.

Утверждение 6.2. Внешняя мера счётно субаддитивна.

Доказательство. Мы это знали для сужения внешней меры на порождённую алгебру. Теперь мы это докажем для произвольных множеств. Рассмотрим произвольные $A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. По определению внешней меры, для каждого A_n существует счётное покрытие $\bigcup_{k=1}^\infty A_{n,k}$ элементами полуалгебры с точностью до $\frac{\varepsilon}{2^n}$, то есть такое покрытие, что

$$\sum_{k=1}^\infty m(A_{n,k}) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Тогда $\bigcup_{n,k} A_{n,k}$ является счётным покрытием множества A , и мы получаем, что

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n,k} m(A_{n,k}) < \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Произвольность выбранного ε заканчивает доказательство. $\square$

Следствие 6.3 (О смысле измеримости). Для любых множеств $A, B \subset \Omega$ выполнено неравенство $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B)$.

Доказательство. В силу утверждения 5.2. □

Теперь мы выделим класс «хороших» множеств, для которых внешняя мера всё-таки является мерой. Как мы выяснили, в качестве такого класса, например, подходит порождённая алгебра $R(S)$. Но зачем ограничивать себя только этим классом? Итак, множество $A \subset \Omega$ называется **измеримым по Лебегу**, если «оно хорошо приближается множествами из порождённой алгебры», то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $A_\varepsilon \in R(S)$, что $\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$. Несложно заметить, что любое множество из порождённой алгебры измеримо (приближая само себя). Из предыдущего следствия получается, что внешние меры множеств A и A_ε близки.

Прежде чем работать с измеримостью, докажем несколько важных утверждений.

Утверждение 6.4. Класс измеримых множеств образует алгебру.

Доказательство. Единица измерима как элемент порождённой алгебры. Рассмотрим произвольные измеримые множества A, B и произвольное $\varepsilon > 0$. Обозначим через $*$ либо $\cap$, либо Δ . Неудивительный факт заключается в том, что множество $A * B$ приближается множеством $A_\varepsilon * B_\varepsilon$, поскольку

$$(A * B) \Delta (A_\varepsilon * B_\varepsilon) \subset (A \Delta A_\varepsilon) \cup (B \Delta B_\varepsilon),$$

где внешняя мера большего множества (по субаддитивности) не превосходит 2ε . Таким образом, оба множества $A \cap B$ и $A \Delta B$ измеримы. □

Утверждение 6.5. Внешняя мера аддитивна на классе измеримых множеств (и, таким образом, является там мерой).

Доказательство. Поскольку класс измеримых множеств образует алгебру, достаточно показать, что если $A = B \sqcup C$, и все три множества измеримы, то $\mu^*(A) = \mu^*(B) + \mu^*(C)$. Неравенство $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(C)$ следует из субаддитивности внешней меры, поэтому нужно доказать только неравенство в другую сторону.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим приближающие множества $B_\varepsilon, C_\varepsilon$ из порождённой алгебры. Заметим, что допустимо взять $A_{2\varepsilon} := B_\varepsilon \cup C_\varepsilon$, поскольку $A \Delta A_{2\varepsilon} \subset (B \Delta B_\varepsilon) \cup (C \Delta C_\varepsilon)$. Таким образом (по следствию 6.3), нужно оценить внешнюю меру множества $A_{2\varepsilon}$. Это нетрудно сделать, поскольку все три множества $A_{2\varepsilon}, B_\varepsilon, C_\varepsilon$ лежат в порождённой алгебре, на которой внешняя мера является мерой. В самом деле,

$$B_\varepsilon \cap C_\varepsilon \subset (B \Delta B_\varepsilon) \cup (C \Delta C_\varepsilon)$$

в силу дизъюнктивности множеств B и C , а тогда $\mu^*(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) < 2\varepsilon$, и

$$\mu^*(A_{2\varepsilon}) = \mu^*(B_\varepsilon) + \mu^*(C_\varepsilon) - \mu^*(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \geq \mu^*(B) + \mu^*(C) - 4\varepsilon.$$

Отсюда

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_{2\varepsilon}) - 2\varepsilon \geq \mu^*(B) + \mu^*(C) - 6\varepsilon.$$

□



Рис. 2. Анри Леон Лебег, 28.06.1875–26.07.1941. Французский математик. Внёс колоссальный вклад в теорию меры

Таким образом, внешняя мера является мерой на алгебре измеримых множеств. Это подводит нас к такому определению: **мерой Лебега** μ называется сужение внешней меры на алгебру измеримых множеств. Следствие 6.3, таким образом, утверждает, что мера измеримых множеств не сильно отличается от меры их приближений.

Теорема 6.6. *Класс измеримых множеств образует σ -алгебру, и мера Лебега на ней σ -аддитивна.*

Доказательство. Счётная аддитивность меры Лебега получается совсем просто: мера Лебега счётно субаддитивна на классе измеримых множеств, который образует алгебру, а по лемме 5.4 счётная субаддитивность и σ -аддитивность меры на полукольце равносильны.

Покажем, что алгебра измеримых множеств замкнута относительно счётного объединения. Рассмотрим измеримые множества $A_1, A_2, \dots$ и положим $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Для каждого n рассмотрим измеримые множества $B_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. Теперь $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$, и в силу монотонности внешней меры, для произвольного N

$$\sum_{n=1}^N \mu(B_n) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^N B_n\right) \leq \mu^*(A) < +\infty,$$

откуда можно заключить, что $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) < +\infty$. Теперь идея в том, чтобы отбросить маленький, но бесконечный хвост: для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим N такое, что $\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(B_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, и в качестве A_ε возьмём множество, $\frac{\varepsilon}{2}$ -приближающее измеримое объединение $\bigsqcup_{n=1}^N B_n$. Оно подходит, поскольку

$$A \triangle A_\varepsilon \subset \left(A_\varepsilon \triangle \bigsqcup_{n=1}^N B_n\right) \cup \bigsqcup_{n=N+1}^{\infty} B_n,$$

и по субаддитивности внешней меры

$$\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) \leq \mu^*\left(A_\varepsilon \triangle \bigsqcup_{n=1}^N B_n\right) + \mu^*\left(\bigsqcup_{n=N+1}^{\infty} B_n\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Таким образом, мы доказали, что любую σ -аддитивную меру можно продолжить на порождённую σ -алгебру $\sigma(\mathcal{S})$.

Теорема 6.7 (Каратеодори о продолжении конечной меры). *Пусть на полуалгебре $\mathcal{S}$ задана σ -аддитивная мера t . Тогда сужение меры Лебега (построенной по мере t) на $\sigma(\mathcal{S})$ является единственным σ -аддитивным продолжением меры t до меры на $\sigma(\mathcal{S})$.*

Доказательство Эрлиха И. Г. Мы уже доказали, что мера Лебега является σ -аддитивной мерой на σ -алгебре измеримых множеств, включающей в себя $\sigma(\mathcal{S})$. Поэтому осталось доказать только единственность продолжения. Рассмотрим некоторое другое σ -аддитивное продолжение η меры t , не совпадающее с мерой Лебега на $\sigma(\mathcal{S})$.

Рассмотрим такое $A \in \sigma(\mathcal{S})$, что $\eta(A) \neq \mu(A)$. В силу его измеримости по Лебегу, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $A_\varepsilon \in R(\mathcal{S})$, что

$$|\mu(A) - \mu(A_\varepsilon)| < \mu(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Поскольку мера t продолжается на $R(\mathcal{S})$ единственным способом, то $\eta(A_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon)$. Из субаддитивности меры η по утверждению 5.2 получается оценка

$$|\eta(A) - \eta(A_\varepsilon)| < \eta(A \triangle A_\varepsilon).$$

В итоге по неравенству треугольника

$$|\mu(A) - \eta(A)| \leq \varepsilon + \eta(A \triangle A_\varepsilon).$$

По определению внешней меры существует такое счётное покрытие $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supset A \triangle A_\varepsilon$ элементами полуалгебры, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) < \mu(A \triangle A_\varepsilon) + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Тогда по субаддитивности меры η и в силу совпадения мер на полуалгебре

$$\eta(A \triangle A_\varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) < 2\varepsilon,$$

и окончательно

$$|\mu(A) - \eta(A)| < 3\varepsilon,$$

что заканчивает доказательство. □

Построение σ -конечной меры

Наша цель теперь: научиться строить меру, принимающую бесконечные значения (например, по длине интервалов на прямой). То есть теперь (σ -аддитивной) мерой называем (σ -) аддитивное отображение $\mathcal{X} \rightarrow [0, +\infty]$. В принципе, такую меру можно построить безо всяких дополнительных ухищрений: например, рассмотрим σ -алгебру всех подмножеств прямой, и зададим меру множества, равную его мощности. Это отображение аддитивно и даже σ -аддитивно, однако на этом его хорошие свойства заканчиваются: например, определить интеграл, которым можно пользоваться, по нему не получится.

Зафиксируем σ -аддитивную меру μ на полуалгебре $\mathcal{S}$. Ныне терминология такая: измеримое множество E имеет

- *конечную меру*, если $\mu(E) < +\infty$, и
- *σ -конечную меру*, если $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где все E_n конечной меры.

Понятно, что всякое множество конечной меры является и множеством σ -конечной меры. Обратное верно <здесь можно сформулировать тавтологию>.

Мы называем меру **σ -конечной**, если любое измеримое множество является множеством σ -конечной меры. По задаче 6.17 (да и напрямую) нетрудно убедиться, что мера в примере выше таким свойством не обладает.

Стоит отметить, что конечная мера, в свою очередь, по нашему определению, просто мера, то есть для которой все измеримые множества имеют конечную меру.

Пример: на полуалгебре (возможно, бесконечных) полуинтервалов мера равна длине полуинтервала. Правда, мы ещё не доказали, что построенная таким образом мера является σ -аддитивной. Мы докажем это позже.



Рис. 3. Константин Каратеодори, 13.09.1873–02.02.1950. Немецкий математик греческого происхождения. Внёс вклад в различные области математики и физики

Построение σ -конечной меры. Пусть на полуалгебре $\mathcal{S}$ задана σ -конечная σ -аддитивная мера m . Рассмотрим произвольное разбиение $\Omega = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ на множества конечной меры. Для каждого n рассмотрим конечную меру Лебега μ_n , построенную по сужению m_n на полуалгебру $\mathcal{S} \cap \Omega_n$ (пересечение понимается поэлементно). Множество $A \subset \Omega$ называется **измеримым по Лебегу**, если для каждого n множества $A \cap \Omega_n$ измеримы относительно меры μ_n ; в таком случае полагаем

$$\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap \Omega_n).$$

Теорема 6.8. *Класс измеримых по Лебегу множеств образует σ -алгебру, на которой мера Лебега σ -конечна. Более того, ни измеримость, ни значение меры не зависят от разбиения на Ω_n .*

Доказательство. Докажем, что измеримые множества образуют σ -алгебру. Множества из $\mathcal{S}$ измеримы, и их мера Лебега совпадает с мерой m . В частности, Ω измеримо. Замкнутость относительно пересечения, симметрической разности и счётного объединения следует из того, что для любого n пересечение с Ω_n «протаскивается» внутрь всех этих теоретико-множественных операций.

Покажем, что мера μ является σ -аддитивной. Из этого будет следовать и её σ -конечность, поскольку мы уже показали, что множества Ω и Ω_n измеримы и сохранили свою меру при продолжении. Для измеримых $A_1, A_2, \dots$ и $A := \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap \Omega_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(A_i \cap \Omega_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Осталось показать независимость от разбиения. Рассмотрим другое разбиение $\Omega = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \Omega'_n$ на множества конечной меры m , и построенную по нему меру Лебега μ' . Для произвольных i, j каждое подмножество множества $\Omega_i \cap \Omega'_j$ одинаково измеримо относительно мер μ и μ' , так как они обе являются лебеговыми продолжениями меры m , суженной на полуалгебру с единицей $\Omega_i \cap \Omega'_j$. Теперь рассмотрим произвольное μ -измеримое множество A и докажем, что оно μ' -измеримо, и что $\mu(A) = \mu'(A)$. Заметим, что для произвольных i, j пересечение $A \cap \Omega_i \cap \Omega'_j$ измеримо относительно меры μ , а потому и относительно меры μ' , и имеет ту же меру. Тогда A измеримо относительно обеих мер, и

$$\mu(A) = \sum_i \mu(A \cap \Omega_i) = \sum_{i,j} \mu(A \cap \Omega_i \cap \Omega'_j) = \sum_{i,j} \mu'(A \cap \Omega_i \cap \Omega'_j) = \sum_j \mu'(A \cap \Omega'_j) = \mu'(A).$$

□

Обратите внимание, что бесконечностью меры мы нигде не пользовались.

Утверждение 6.9. *Любая σ -конечная σ -аддитивная мера на σ -алгебре непрерывна снизу, но может не быть непрерывной сверху.*

Доказательство. Для доказательства непрерывности снизу достаточно проверить, что работают все те же переходы, что и для конечной меры. Для непрерывности сверху рассмотрим классическую меру Лебега на прямой (или считающую меру на $\mathbb{N}$), и множества $[n, +\infty)$. Их мера бесконечна, но мера предела (равного пустому множеству) равна нулю. □

Теорема 6.10 (Каратеодори о продолжении σ -конечной меры). *Пусть на полуалгебре $\mathcal{S}$ задана σ -аддитивная σ -конечная мера m . Тогда сужение меры Лебега (построенной по мере m) на $\sigma(\mathcal{S})$ является единственным σ -аддитивным σ -конечным продолжением меры m до меры на $\sigma(\mathcal{S})$.*

Доказательство. Следует из того, что при разбиении $\Omega = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ мера на всех Ω_n продолжается единственным образом (по теореме 6.7), и на всю Ω по σ -аддитивности тоже.

Тут надо быть внимательнее. Вообще-то, мы хотим применить теорему Каратеодори для конечной меры к σ -алгебре $\sigma(\mathcal{S}) \cap \Omega_n$, а она применима к $\sigma(\mathcal{S} \cap \Omega_n)$. На самом деле,

$$\sigma(\mathcal{S} \cap \Omega_n) = \sigma(\mathcal{S}) \cap \Omega_n.$$

Чтобы доказать равенство, нужно показать включение в две стороны. Включение

$$\sigma(\mathcal{S} \cap \Omega_n) \subset \sigma(\mathcal{S}) \cap \Omega_n$$

следует из того, что $\sigma(\mathcal{S}) \cap \Omega_n$ является σ -алгеброй над $\mathcal{S} \cap \Omega_n$. На доказательстве включения

$$\sigma(\mathcal{S} \cap \Omega_n) \supset \sigma(\mathcal{S}) \cap \Omega_n$$

мы продемонстрируем очень мощный принцип подходящих множеств. Рассмотрим систему

$$\mathcal{F} := \{A \in \sigma(\mathcal{S}) : A \cap \Omega_n \in \sigma(\mathcal{S} \cap \Omega_n)\}.$$

Понятно, что $\mathcal{F} \supset \mathcal{S}$, и нетрудно проверить, что $\mathcal{F}$ является σ -алгеброй. Отсюда следует, что $\mathcal{F} \supset \sigma(\mathcal{S})$; отсюда $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{S})$. $\square$

Из единственности продолжения вытекает следующий результат.

Следствие 6.11. *Для равенства двух σ -аддитивных σ -конечных мер на σ -алгебре необходимо и достаточно, чтобы они совпадали на порождающей полуалгебре.*

Произвольная мера (на некотором классе измеримых относительно этой меры множеств) называется **полной**, если любое подмножество множества нулевой меры измеримо (и, таким образом, имеет нулевую меру). Важное свойство меры Лебега заключается в том, что *мера Лебега полна*: в самом деле, любое подмножество множества нулевой меры Лебега можно приблизить пустым множеством. Как мы увидим позже, для некоторых мер свойство полноты не выполняется.

Теорема 6.12 (О структуре измеримых множеств). *Множество A является измеримым по Лебегу тогда и только тогда, когда найдутся такие измеримое ядро $A' \in \sigma(\mathcal{S})$ и измеримая оболочка $A'' \in \sigma(\mathcal{S})$, что*

$$A' \subset A \subset A'' \quad \text{и} \quad \mu(A'' \setminus A') = 0.$$

Следовательно, любое измеримое множество представимо в виде дизъюнктного объединения множества из $\sigma(\mathcal{S})$ и множества нулевой меры.

Лемма 6.13. *Пусть мера Лебега μ конечна, и A — некоторое множество. Тогда найдутся такие измеримое ядро $A' \in \sigma(\mathcal{S})$ и измеримая оболочка $A'' \in \sigma(\mathcal{S})$, что*

$$A' \subset A \subset A'', \quad \mu(A'') = \mu^*(A) \quad \text{и} \quad \mu(\Omega \setminus A') = \mu^*(\Omega \setminus A).$$

Доказательство. По определению внешней меры (и по её счётной субаддитивности), для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое покрытие $A^\varepsilon \in \sigma(\mathcal{S})$ множества A , что $\mu^*(A) \geq \mu(A^\varepsilon) - \varepsilon$. Таким образом, найдётся такое множество $A'' := \bigcap_{\varepsilon \rightarrow 0} A^\varepsilon \in \sigma(\mathcal{S})$, что $A'' \supset A$ и $\mu^*(A) = \mu(A'')$. Аналогично строится множество $\Omega \setminus A'$ для множества $\Omega \setminus A$. $\square$

Доказательство теоремы 6.12 о структуре измеримых множеств. Пусть множество A измеримо. Переходя к разбиению $\Omega = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, достаточно рассмотреть случай конечной меры. Тогда из предыдущей леммы получаем измеримые ядро и оболочку, и, заменяя внешние меры на меры, получаем требуемое. Обратно, пусть $\mu(A'' \setminus A') = 0$. Тогда $A = A' \sqcup B$, где $B \subset A'' \setminus A'$ — некое измеримое множество нулевой меры. $\square$

Отсюда можно вывести и такую интересную теорему.

Теорема 6.14 (О единственности меры Лебега). *Пусть задана σ -конечная σ -аддитивная мера μ на полуалгебре $\mathcal{S}$. Тогда класс измеримых по Лебегу множеств является наименьшей σ -алгеброй, на которой существует полное σ -конечное σ -аддитивное продолжение меры μ . Более того, мера Лебега является единственным таким продолжением на эту σ -алгебру.*

Доказательство намечено в задачах 6.21, 6.22, и 6.23.

§7. МЕРА ЛЕБЕГА—СТИЛТЬЕСА. БОРЕЛЕВСКИЕ МЕРЫ

Парадоксы — ценная вещь в том смысле, что без них нет границ. Нож теории идёт как в масло, и создаётся впечатление, что Вселенная изотропно-масляная во всех направлениях

В. Босс

Рассмотрим полуалгебру $\mathcal{S}$ прямой, состоящую из всех полуинтервалов вида $(a, b]$; границы a, b могут быть бесконечными, но правую $+\infty$ мы не включаем, конечно. Для непрерывной справа нестрого возрастающей функции $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ зададим σ -конечную меру $m: \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$ по правилу

$$m(a, b] := F(b) - F(a).$$

Очевидно, что m является мерой, поскольку неотрицательна и аддитивна, а её σ -конечность следует из разбиения прямой на непересекающиеся конечные полуинтервалы.

Лемма 7.1. Построенная мера m является σ -аддитивной на полуалгебре $\mathcal{S}$.

Доказательство. Тут стоит отметить, что для σ -конечной меры её счётные суб-, супер- и просто аддитивность связаны точно так же, как и для конечных мер. Поэтому достаточно доказать счётную субаддитивность. Рассмотрим

$$(a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n],$$

где все a, b, a_n, b_n конечны. По непрерывности справа функции F можно отступить от b_n вправо в точку $b'_n > b_n$ так, чтобы значение функции изменилось не больше, чем на $\frac{\varepsilon}{2^n}$. Аналогично можно отступить от a вправо в точку $a' > a$ так, чтобы значения функции F в этих точках отличались не больше, чем на ε . Теперь

$$[a', b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b'_n),$$

и по лемме Гейне—Бореля можно выбрать конечное подпокрытие

$$(a', b] \subset [a', b] \subset \bigcup_{n=1}^N (a_n, b'_n) \subset \bigcup_{n=1}^N (a_n, b'_n].$$

Теперь в силу (конечной) субаддитивности

$$m(a, b] \leq m(a', b] + \varepsilon \leq \sum_{n=1}^N m(a_n, b'_n] + \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(a_n, b_n] + 2\varepsilon.$$

Произвольный выбор погрешности ε завершает эту часть доказательства.

Пусть теперь

$$(a, +\infty) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где a конечно, и $A_n \in \mathcal{S}$. Тогда

$$m(a, +\infty) = \lim_{b \rightarrow +\infty} m(a, b] \leq \lim_{b \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m((a, b] \cap A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Случай $a = -\infty$ доказывается аналогично. □

Из доказанной леммы следует, что по мере μ можно построить меру Лебега μ_F на некоторой σ -алгебре измеримых множеств (в частности, на борелевских множествах). Построенная таким образом мера называется **мерой Лебега—Стилтьеса** и является очень важным объектом в теории вероятностей. Стоит отметить, что в классической литературе меры Лебега—Стилтьеса строят по непрерывным слева функциям на полуинтервалах вида $[a, b)$. Мы же используем обозначения, согласованные с обозначениями из теории вероятностей (в которой функция F имеет своё название *функции распределения*).

Упражнение 7.А. Если $\mu_F = \mu_G$, то функции F и G отличаются друг от друга сдвигом на константу.

В теории вероятностей обычно нас интересуют не меры на каких-то непонятных измеримых множествах, а меры на борелевских множествах. Такие меры называются борелевскими. Хочется сказать, что по борелевской мере μ можно построить функцию

$$F(x) = \mu(-\infty, x],$$

а потом по этой функции построить меру μ_F , и получить продолжение меры μ . Для конечной меры μ это действительно сработает. К сожалению, для σ -конечной меры есть следующий контрпример: на полуинтервале $(0, 1]$ построим меру по логарифму, то есть

$$\mu_{\ln}(a, b] = \ln b - \ln a.$$

Для неё не существует такой функции $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что μ_F продолжает μ : в самом деле, из построения видно, что μ_F конечна на отрезках, а взятая нами мера $\mu_{\ln}$ бесконечна на отрезке $[0, 1]$. Чтобы по мере μ всё-таки можно было построить функцию F , нужно потребовать дополнительное условие: мера μ должна быть **локально-конечной**, то есть конечной на всех отрезках.

Подытожим: **борелевская мера**, или **мера Бореля** — это σ -конечная локально-конечная σ -аддитивная мера на борелевской σ -алгебре.

Упражнение 7.В. Если мера на борелевской σ -алгебре конечна, то она σ -конечна и локально-конечна. Если она ещё и σ -аддитивна, то она является борелевской мерой.

Упражнение 7.С. Для любой борелевской меры μ на прямой функция $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определённая как $F(x) := \mu(-\infty, x]$, является непрерывной справа и нестрого возрастающей; кроме того, мера Лебега—Стилтьеса μ_F продолжает меру μ .

Таким образом, любая борелевская мера по своей сути является мерой Лебега—Стилтьеса. Так что это название используют скорее, чтобы подчеркнуть способ построения меры.

Главным примером σ -конечной меры является **классическая мера Лебега λ** , построенная по мере, равной длине полуинтервалов.

Упражнение 7.Д. Классическая мера Лебега трансляционно инвариантна, то есть, если A измеримо, то $A + h := \{a + h : a \in A\}$ тоже измеримо, и $\lambda(A) = \lambda(A + h)$.

Оставшуюся часть лекции мы посвятим двум важным примерам.

Теорема 7.2 (множество Витали). У любого подмножества прямой, имеющего классическую положительную меру Лебега, существует неизмеримое по Лебегу подмножество.

Доказательство. Доказательство существенно опирается на аксиому выбора. Если заменить аксиому выбора на аксиому детерминированности, все множества станут измеримы!

Для начала заметим, что если множество имеет положительную меру Лебега, то и его пересечение с некоторым отрезком $[x, x + 1]$ имеет положительную меру Лебега. Можно считать, что это отрезок $[0, 1]$.

Итак, введём на $[0, 1]$ отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y \in \mathbb{Q}$. Таким образом, весь отрезок разбивается на классы эквивалентности. По аксиоме выбора, в каждом классе можно выбрать по представителю. Обозначим через V множество всех выбранных представителей (то есть, образ функции выбора).

Для каждого рационального $r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ рассмотрим сдвиги $V_r := V + r = \{v + r : v \in V\}$. Заметим, что при различных $r \neq r'$ множества V_r и $V_{r'}$ не пересекаются: в самом деле, иначе бы это означало, что некоторые два разных представителя отличаются на $r - r' \in \mathbb{Q}$.

Покажем, что ни одно из множеств V_r не имеет подмножества положительной меры. В самом деле, пусть нашлось $B_{r_0} \subset V_{r_0}$ положительной меры. Тогда, в силу трансляционной инвариантности меры Лебега, для каждого r найдутся $B_r \subset V_r$ той же меры. Тогда

$$\bigsqcup_r B_r \subset \bigsqcup_r V_r \subset [-1, 2],$$

и

$$+\infty = \sum_r \lambda(B_r) \leq \sum_r \lambda(V_r) \leq 3.$$

Осталось завершить доказательство теоремы. Рассмотрим произвольное подмножество $A \subset [0, 1]$ положительной меры. Рассмотрим множества $A \cap V_r$. По только что доказанному, ни одно из них не является множеством положительной меры. Но они не могут все быть множествами нулевой меры, поскольку

$$A \subset \bigsqcup_r A \cap V_r.$$

Следовательно, как минимум одно из этих множеств неизмеримо. □

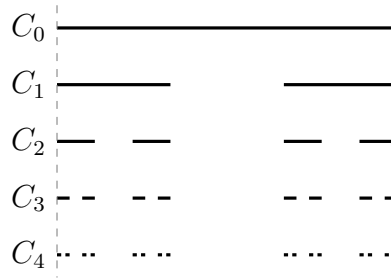


Рис. 4. Первые пять итераций построения множества Кантора

Далее рассмотрим ещё один контринтуитивный пример — *множество Кантора*. Оно строится следующим образом. Обозначим $C_0 := [0, 1]$. Выделим в нём центральную треть $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ и удалим; получим множество C_1 . На следующем шаге в каждом из двух отрезков в C_1 выделим центральный интервал, и удалим их оба; получится множество C_2 . И так далее: множество C_{n+1} получается из множества C_n выкидыванием 2^n интервалов, являющихся центральными третями отрезков, из которых состоит множество C_n (см. рис. 4 для $n = 0, 1, 2, 3, 4$). Предельное множество

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

и называется *множеством Кантора*.

Теорема 7.3. *Множество Кантора нигде не плотно, континуально, компактно, и является борелевским множеством нулевой меры.*

Доказательство. Нигде не плотность означает, что в любой (непустой) открытой окрестности $U \subset [0, 1]$ найдётся (непустое) открытое множество $V \subset U \setminus C$. Это следует из того, что числа вида $\frac{k}{3^n}$ всюду плотны, и каждое из них является либо концом, либо внутренней точкой одного из выкинутых интервалов. В качестве V берём пересечение выкинутого интервала и U .

Континуальность множества Кантора следует из того, что каждая точка множества Кантора однозначно сопоставляется последовательности из $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, которых, как известно, континуум.

Компактность следует из того, что множество Кантора ограничено и замкнуто как счётное пересечение замкнутых множеств.

Борелевость следует из замкнутости.

Наконец, $\lambda(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2}{3})^n = 0$ в силу непрерывности меры. □

По трансфинитной индукции можно доказать, что борелевская σ -алгебра прямой континуальна. Отсюда и из последнего свойства множества Кантора мы получаем, что классическая мера Бореля (в отличие от меры Лебега) неполна. В самом деле, множество Кантора имеет гиперконтинуум подмножеств, которые должны иметь нулевую меру. При этом всего борелевских множеств континуум. Значит, у канторова множества существует гиперконтинуум неборелевских подмножеств, что противоречит полноте классической меры Бореля. Мы докажем этот факт в теореме 8.8, не используя континуальности борелевской σ -алгебры (которую мы оставляем без доказательства).

Аналогично можно доказать и неполноту неклассической борелевской меры; главное, чтобы существовало континуальное борелевское множество нулевой меры.

§8. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

Though this be madness,
there is method in't
W. Shakespeare

Пару (X, σ_X) , состоящую из единицы X и σ -алгебры σ_X на ней, называют **измеримым пространством**. Это определение объясняется тем, что обычно на σ_X ещё задана некоторая мера, относительно которой все элементы σ -алгебры являются измеримыми.

Зафиксируем два измеримых пространства (X, σ_X) и (Y, σ_Y) . Функция $f: X \rightarrow Y$ называется **$\sigma_X|\sigma_Y$ -измеримой**, или просто **измеримой** (если из контекста понятно, о каких σ -алгебрах речь), если $f^{-1}(B) \in \sigma_X$ для любого $B \in \sigma_Y$. Иногда такие функции обозначают $f: (X, \sigma_X) \rightarrow (Y, \sigma_Y)$, чтобы явно подчеркнуть, относительно каких σ -алгебр полагается измеримость.

Упражнение 8.А. Композиция любых измеримых функций $(X, \sigma_X) \rightarrow (Y, \sigma_Y)$ и $(Y, \sigma_Y) \rightarrow (Z, \sigma_Z)$ измерима.

Важные примеры. Обозначим через $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ борелевскую σ -алгебру (то есть σ -алгебру, порождённую всеми открытыми множествами прямой). Через $\mathcal{M}$ обозначим σ -алгебру измеримых по Лебегу множеств. **Борелевскими** называются функции $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. **Измеримыми по Лебегу** называются функции $(\mathbb{R}, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Из свойств измеримости мы знаем, что любая борелевская функция измерима. Как мы увидим дальше, обратное не всегда верно.

Ещё один важный пример: случайные величины, являющиеся измеримыми функциями относительно некоторой σ -алгебры событий.

Упражнение 8.В. Борелевская функция от измеримой — измерима. Композиция борелевских — борелевская.

Теорема 8.1 (Критерий измеримости). Пусть $\sigma_Y = \sigma(\mathcal{G})$, т.е. $\mathcal{G} \subset \sigma_Y$ — некоторый порождающий класс. Тогда функция $f: (X, \sigma_X) \rightarrow (Y, \sigma_Y)$ измерима тогда и только тогда, когда она $\sigma_X|\mathcal{G}$ -измерима.

Доказательство. Необходимость тривиальна, так что докажем достаточность. Здесь снова работает принцип подходящих множеств. Рассмотрим систему $\mathcal{A} := \{A \in \sigma_Y : f^{-1}(A) \in \sigma_X\}$. Заметим, во-первых, что она является σ -алгеброй, а во-вторых, что $\mathcal{A} \supset \mathcal{G}$. Но тогда $\mathcal{A} \supset \sigma_Y$, откуда следует $\mathcal{A} = \sigma_Y$. $\square$

Следствие 8.2. Любая непрерывная функция $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является борелевской.

Доказательство. Следует по критерию измеримости из того, что открытые множества порождают борелевскую σ -алгебру, и что прообраз любого открытого множества под действием непрерывной функции открыт. $\square$

Далее мы зафиксируем некое измеримое пространство (X, σ_X) и будем рассматривать измеримые функции $(X, \sigma_X) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Для удобства будем обозначать

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} =: \{f \in B\}.$$

Это мы, конечно, переняли от случайных величин.

Замечание. Иногда приходится иметь дело с функциями, которые могут принимать ещё бесконечные значения. В таком случае нужно отдельно рассматривать прообразы бесконечностей. Они будут измеримы, поскольку

$$\{f = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > n\} \in \sigma_X,$$

когда уже доказана измеримость прообразов всех лучей. В остальном работа с бесконечностями делает доказательства немного более техническими, но принципиально ничего не меняет, так что мы не будем заострять на этом внимание. В дальнейшем, когда мы введём меру, функции будут принимать бесконечные значения только на множествах нулевой меры, так что бесконечности не будут играть никакой роли в наших рассуждениях.

Утверждение 8.3. *Сумма, разность, произведение и частное измеримых функций — измеримы.*

Доказательство. По критерию измеримости, достаточно проверить, что прообразы всех левосторонних лучей измеримы.

Для начала заметим, что борелевская функция от измеримой — измерима. В частности, сдвиг и домножение на константу оставляют функцию измеримой. Рассмотрим две измеримые f, g . Для произвольного $c \in \mathbb{R}$

$$\{f + g < c\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{r < c - g\} \in \sigma_X,$$

поэтому сумма $f + g$ измерима. Разность измерима, так как $-g$ измерима. Наконец, $fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$ измерима. Функция $\frac{1}{g}$ измерима (здесь впервые может возникнуть бесконечное значение при делении на ноль, и нужно сказать, что прообраз нуля измерим), а поэтому и частное измеримо. $\square$

Утверждение 8.4. *Измеримость наследуется при взятии супремума/инфимума по счётному набору функций, а также при переходе к верхнему, нижнему, и просто пределу.*

Доказательство. Рассмотрим измеримые функции $f_1, f_2, \dots$. Тогда для произвольного $c \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \sup_n f_n \leq c \right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq c\} \in \sigma_X,$$

откуда следует измеримость супремума. Измеримость инфимума доказывается аналогично. Измеримость верхнего предела следует из того, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{m \geq n} f_m.$$

С нижним пределом аналогично. Наконец, просто предел, когда существует, совпадает с верхним и с нижним. $\square$

Упражнение 8.С. *Для измеримых функций $f_1, f_2, \dots$ множество $\{\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n\}$ измеримо.*

Для измеримой функции $f: (X, \sigma_X) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ обозначим через $\sigma(f) \subset \sigma_X$ сигма-алгебру прообразов борелевских множеств под действием функции f .

Измеримая функция называется **простой**, если она принимает конечное число значений. Введя обозначение индикатора $\mathcal{I}_A = \mathcal{I}(A): X \rightarrow \mathbb{R}$ для $A \in \sigma_X$, определённого как

$$\mathcal{I}_A(x) = \mathcal{I}(A)(x) := \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

можно любую простую функцию φ представить в виде линейной комбинации

$$\varphi = \sum_{y \in \text{Im } \varphi} y \mathcal{I}\{\varphi = y\}.$$

Здесь и далее мы упростили запись $(\{x : \varphi(x) = y\}) = (\{\varphi = y\}) = \{\varphi = y\}$. Обозначение $\mathcal{I}_A$ (наряду с χ_A ; в этом случае индикатор называют характеристической функцией множества) не очень удобно, поскольку в нём основная информация — множество A — уходит в нижний индекс. В машинном обучении могут использовать обозначение $[A]$.

Не путайте понятие простой и ступенчатой функций: ступенчатые функции возникают в математическом анализе, когда простая функция принимает постоянные значения на отрезках. У нас ступенчатые функции, если и появятся, то только в примерах.

Теорема 8.5. *Для любой измеримой функции f существует последовательность простых $\sigma(f)$ -измеримых функций, сходящаяся к f поточечно. В случае, если f неотрицательна, все простые также можно построить неотрицательными, и их последовательность будет возрастающей. Если f ограничена, то сходимость можно сделать равномерной.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно функции $f^+ := \max(f, 0)$ и $f^- := -\min(0, f)$, достаточно доказать утверждение для неотрицательной f . Тогда построим

$$\varphi_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \mathcal{I}\left\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\right\} + n \mathcal{I}\{f \geq n\}.$$

Последний индикатор добавлен для обработки значений $f = +\infty$. $\square$

Вспомним теперь, что измеримые пространства у нас обычно с мерой, то есть имеется мера μ , и $\sigma_{\mathcal{X}}$ образован всеми μ -измеримыми множествами. В таком случае $\sigma_{\mathcal{X}}$ -измеримые функции называют μ -измеримыми.

На самом деле, большинство сформулированных нами свойств выполняется, даже если речь идёт про множества, дополнения которых имеют нулевую меру. Таким образом, некоторое свойство выполнено *почти всюду*, если мера множества, где оно не выполнено, равна нулю. Например, поточечную сходимость в большинстве случаев можно ослабить до *сходимости почти всюду*.

Теорема 8.6. *Пусть мера Лебега μ построена по σ -аддитивной мере на полуалгебре $\mathcal{S}$. Тогда любая μ -измеримая функция почти всюду равна некоторой $\sigma(\mathcal{S})$ -измеримой функции.*

Доказательство через предельный переход. Для простой функции это следует из теоремы 6.12 о структуре измеримых множеств. В произвольном случае рассмотрим последовательность μ -измеримых простых функций φ_n , сходящуюся к μ -измеримой f поточечно. Они почти всюду равны некоторым $\sigma(\mathcal{S})$ -измеримым простым функциям ψ_n . Рассмотрим множество нулевой меры, вне которого $\varphi_n = \psi_n$ для всех n , и погрузим его в некоторое множество $N \in \sigma(\mathcal{S})$ нулевой меры (которое существует снова в силу теоремы 6.12). Теперь функции $\psi_n \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ сходятся поточечно к функции $f \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$, являющейся $\sigma(\mathcal{S})$ -измеримой (по утверждению 8.4) и равной f почти всюду. $\square$

Конструктивное доказательство. Рассмотрим произвольную μ -измеримую функцию f . По теореме 6.12 о структуре измеримых множеств, для каждого $r \in \mathbb{Q}$ множество $\{f < r\}$ разбивается на множество из $\sigma(\mathcal{S})$ и множество N_r нулевой меры. Погрузим множество $\bigcup_r N_r$ в множество $N \in \sigma(\mathcal{S})$ нулевой меры. Тогда функция $f \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ почти всюду равна f и $\sigma(\mathcal{S})$ -измерима. $\square$

Оставшуюся часть лекции снова посвятим контринтуитивным контрпримерам.

Лестница Кантора $c: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ строится следующим образом. Вспомним, как строилось множество Кантора: $C_0 := [0, 1]$, и множество C_{n+1} получалось из множества C_n выкидыванием 2^n интервалов, являющихся центральными третями отрезков, из которых состояло множество C_n . Сперва определим частичную функцию $\tilde{c}$ итеративно по n (см. рис. 5 для $n = 3$). На нулевом шаге $\tilde{c}(0) = 0$ и $\tilde{c}(1) = 1$. Далее на замыкании каждого выкинутого интервала из $C_n \setminus C_{n+1}$ зададим $\tilde{c}$ следующим образом: если выкинутый интервал $(a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3}) \subset C_n \setminus C_{n+1}$ выкинут из отрезка $[a, b] \subset C_n$, то на всём $[a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3}]$ функция $\tilde{c}$ равна $\frac{\tilde{c}(a) + \tilde{c}(b)}{2}$ (можно убедиться, что на выкинутом интервале функция $\tilde{c}$ равна середине этого интервала, умноженной на 1.5^n).

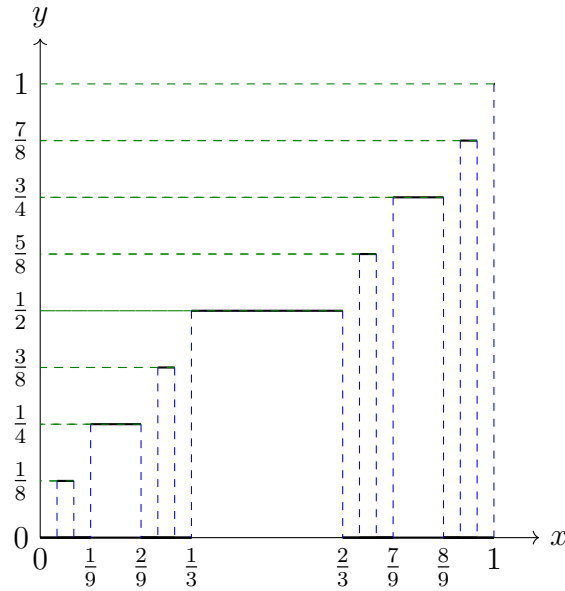


Рис. 5. Итерации 0, 1, 2, 3 построения функции $\tilde{c}$

Теперь **лестница Кантора** c получается из $\tilde{c}$ доопределением в точках $x \in C$, не являющихся концами выкинутых интервалов, как $c(x) := \sup_{y \leq x, y \in \text{dom } \tilde{c}} \tilde{c}(y)$.

Теорема 8.7. *Лестница Кантора непрерывна и нестрого возрастает.*

Доказательство. Монотонность лестницы Кантора следует из того, что $\tilde{c}$ монотонна, а супремумы в доопределении лестницы Кантора берутся по значениям, меньшим значений справа.

Допустим, лестница Кантора не непрерывна; тогда она имеет неустранимые разрывы первого рода. В этих разрывах обязательно найдётся точка вида $\frac{k}{2^n}$. Остаётся заметить, что лестница Кантора принимает все значения такого вида, что приводит к противоречию. $\square$

Теорема 8.8. (i) *Классическая мера Бореля, в отличие от меры Лебега, не полна.*
(ii) *Существует измеримая функция, не являющаяся борелевской.*
(iii) *Измеримая функция от борелевской не всегда измерима.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $h := \frac{c+\text{id}}{2}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. По доказанному выше, она непрерывна, строго монотонна, а потому биективна, и тогда её обратная h^{-1} тоже непрерывна. То есть h является *гомеоморфизмом* отрезка $[0, 1]$ на себя. Заметим, что $\lambda(h(C)) = \frac{1}{2}$: в самом деле, мера образа всех выкинутых интервалов равна половине их длины, а потому мера дополнения образа канторова множества равна $\frac{1}{2}$. Следовательно, существует неизмеримое по Лебегу подмножество $V \subset h(C)$, и, как следствие, неборелевское. Тогда его прообраз $h^{-1}(V) \subset C$ тоже неборелевское множество, но измеримое, в силу полноты меры Лебега. Этим мы доказали (i).

В качестве измеримой неборелевской функции достаточно взять индикатор $\mathcal{I}(h^{-1}(V))$; это доказывает (ii).

Наконец, для доказательства утверждения (iii) нужно рассмотреть композицию $\mathcal{I}(h^{-1}(V)) \circ h^{-1}$. Она не является измеримой, поскольку прообраз единицы

$$\{\mathcal{I}(h^{-1}(V)) \circ h^{-1} = 1\} = \{h^{-1} \in h^{-1}(V)\} = V$$

неизмерим. $\square$

§9. СХОДИМОСТИ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

Но их то две, то ни одной,
то сразу гроздь их

М. Щербаков

Отныне и впредь будем работать с σ -аддитивными мерами на σ -алгебрах (если явно не оговорено иное).

Теперь мы считаем, что у нас задано измеримое пространство с мерой, а именно, зафиксирована тройка (X, σ_X, μ) , где σ_X -алгебра σ_X состоит из множеств, измеримых относительно меры μ . Мы работаем только с измеримыми функциями, чтобы не возникало парадоксов с неизмеримостью (см. задачу 8.14). Мы считаем, что функции принимают бесконечные значения только на множествах нулевой меры, так что это не влияет на наши рассуждения.

Напомним, что последовательность измеримых функций $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ **сходится почти всюду** к измеримой функции f , если (буквально сходится почти всюду, то есть) $\mu\{f_n \not\rightarrow f\} = 0$. Обозначение: $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} f$.

Последовательность функций f_n **сходится по мере** к функции f , если для любого $\varepsilon > 0$ «меры плохих множеств сходятся к нулю», то есть

$$\mu\{|f_n - f| > \varepsilon\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Обозначение: $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$.

Мы уже встречали эту сходимость: ЗБЧ утверждает, что среднее случайных величин сходится к матожиданию по вероятностной мере.

Последовательность функций f_n **сходится почти равномерно** к функции f , если для любого $\gamma > 0$ найдётся такое «плохое, но маленькое» измеримое множество E_γ меры $\mu(E_\gamma) < \gamma$, что вне E_γ функции сходятся равномерно, то есть $\sup_{x \in X \setminus E_\gamma} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Дальнейшая часть лекции посвящена исследованию этих трёх типов сходимости.

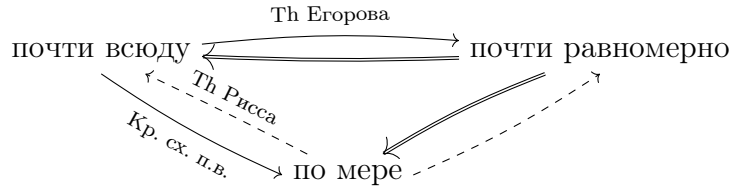


Рис. 6. Взаимосвязь между видами сходимости. Имеется в виду не просто влечение сходимости, но и наследование предела. Пунктирная стрелка: можно выделить подпоследовательность. Обычная стрелка: на пространстве конечной меры. Двойная стрелка: без дополнительных ограничений.

Как видно из рисунка 6, из почти равномерной сходимости следуют две другие всегда; из сходимости почти всюду следуют две другие, но лишь на пространстве конечной меры; из сходимости по мере всегда можно выделить подпоследовательность.

Говорят, что две функции **эквивалентны**, если они равны почти всюду. Нетрудно проверить, что это и правда отношение эквивалентности.

Теорема 9.1 (Единственность пределов). *Все три предела единственны с точностью до эквивалентности.*

Доказательство. Для сходимости п.в. теорема очевидна. Для сходимости по мере она следует из неравенства треугольника: для двух пределов f, g

$$\{|f - g| > 2\varepsilon\} \subset \{|f_n - f| > \varepsilon\} \cup \{|f_n - g| > \varepsilon\},$$

где мера правого множества сколь угодно мала, а мера левого множества постоянна.

Наконец, для почти равномерной сходимости единственность предела можно получить и напрямую по определению (упражнение), но мы её получим так: из почти равномерной сходимости следует сходимость почти всюду, у которой не может быть двух пределов. $\square$

Теорема 9.2 (Критерий сходимости почти всюду). *На пространстве конечной меры сходимость $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} f$ равносильна сходимости $\sup_{n \geq N} |f_n - f| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mu} 0$, что равносильно*

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq N} \{|f_n - f| > \varepsilon\} \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Доказательство очень простое. Рассмотрим множество, где нет сходимости:

$$\{f_n \not\xrightarrow{p.v.} f\} = \{\exists \varepsilon \forall N \exists n \geq N : |f_n - f| \geq \varepsilon\} = \bigcup_{\varepsilon \rightarrow 0} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}.$$

Сходимость почти всюду равносильна тому, что мера данного множества нулевая. В силу непрерывности снизу меры, это равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ мера множества

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}$$

нулевая. В силу непрерывности меры сверху, последнее равносильно сходимости в критерии. $\square$

? Где в доказательстве использована конечность меры?

Следствие 9.3. *На пространстве конечной меры из сходимости почти всюду следует сходимость по мере. Для σ -конечной меры это может не выполняться.*

Доказательство. Следствие получается из критерия сходимости п.в. Для классической меры Лебега на прямой работает пример, аналогичный тому, который ломает непрерывность бесконечной меры: индикаторы $\mathcal{I}[n, +\infty)$ сходятся к нулю почти всюду, но не по мере. $\square$

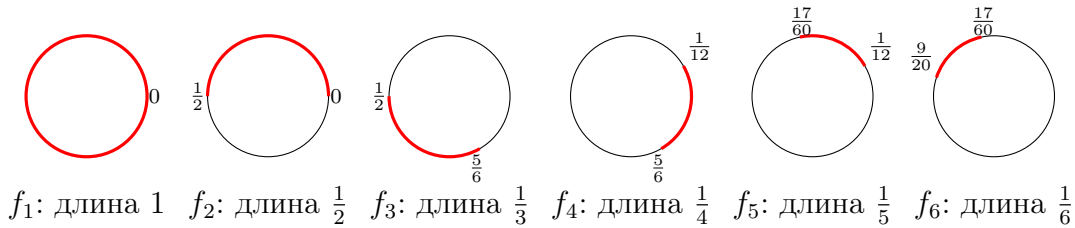


Рис. 7. Намотка первых шести дуг длины $\frac{1}{n}$ на окружность единичной длины

Контрпример Рисса, показывающий, что из сходимости по мере может не следовать сходимость почти всюду, это известная **typewriter sequence** (также называемая *последовательность бегающих отрезков*). Другой контрпример — намотка индикаторов дуг длины $\frac{1}{n}$ на единичную окружность (см. рис. 7 для $n = 1, \dots, 6$). Стоит обратить внимание, что на дискретном вероятностном пространстве сходимости по мере и почти всюду эквивалентны, как мы уже видели, обсуждая ЗБЧ.

Теорема 9.4 (Рисс). *Из любой последовательности сходящихся по мере функций можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду (к той же функции).*

Мы получим теорему Рисса как следствие из других видов сходимости.

Теорема 9.5 (Егоров). *На пространстве конечной меры из сходимости почти всюду следует почти равномерная сходимость.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\gamma > 0$. Из критерия сходимости п.в. возьмём такую последовательность N_m , что

$$\mu \left\{ \sup_{n \geq N_m} |f_n - f| > \frac{1}{m} \right\} < \frac{\gamma}{2^m}.$$

Обозначим множества под мерой через E_m , и положим $E_\gamma := \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. По счётной субаддитивности меры, $\mu(E_\gamma) < \gamma$. На дополнении $X \setminus E_\gamma$ для любого $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого m для всех $n > N_m$ выполнено $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ равномерно по всем x . $\square$

На σ -конечном пространстве из сходимости почти всюду может и не следовать почти равномерная; подходит тот же контрпример с индикаторами лучей $[n, +\infty)$.

Таким образом, мы разобрались со сходимостью почти всюду. Перейдём к почти равномерной сходимости.

Утверждение 9.6. *Из почти равномерной сходимости следует сходимость почти всюду.*

Доказательство. Множество, где нет сходимости, измеримо и является подмножеством пересечения $\bigcap_{\gamma \rightarrow 0} E_\gamma$ нулевой меры. $\square$

Утверждение 9.7. *Из почти равномерной сходимости следует сходимость по мере.*

Доказательство. Для любых $\varepsilon, \gamma > 0$ на некотором множестве $X \setminus E_\gamma$ с $\mu(E_\gamma) < \gamma$ начиная с некоторого номера N для всех $n \geq N$ выполнено $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. В таком случае для тех же n выполнено $\{|f_n - f| > \varepsilon\} \subset E_\gamma$. $\square$

Из любого из этих двух утверждений и следует единственность предела для почти равномерной сходимости в теореме 9.1.

Осталось разобраться со сходимостью по мере. Для этого будет удобно ввести понятие фундаментальности.

Напоминания из матана. Последовательность функций $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *фундаментальной*, если для любого $x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что для произвольных $n, m > N$ обязательно $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Иными словами, для любого x числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна. Для краткости будем писать

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| = 0$$

здесь, и в похожих случаях. Последовательность функций $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *равномерно фундаментальной*, если теперь фундаментальность равномерна по всем $x \in X$, то есть

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| = 0.$$

(Здесь, конечно, $\limsup$, но не путайте с верхним пределом.)

Упражнение 9.А (Критерии Коши из матана). *Поточечная сходимость функций равносильна фундаментальности. Равномерная сходимость функций равносильна равномерной фундаментальности.*

Идея доказательства. Для поточечного типа это следует из свойств числовых последовательностей. Для равномерной фундаментальности для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем такое $N \in \mathbb{N}$, что начиная с него для всех $n, m > N$ и для всех $x \in X$ выполнено

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Зафиксируем n и устремим m к бесконечности. Получим

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Доказательство завершает тот факт, что N выбрано независимо от x . $\square$

Последовательность функций $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *фундаментальной почти всюду*, если она фундаментальна почти всюду :)

Последовательность функций $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *фундаментальной почти равномерно*, если для любого $\gamma > 0$ найдётся такое множество E_γ , что $\mu(E_\gamma) < \gamma$ и вне E_γ последовательность равномерно фундаментальна.

Последовательность функций $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется **фундаментальной по мере**, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mu\{|f_n - f_m| > \varepsilon\} = 0.$$

Утверждение 9.8 (Критерии Коши). *Сходимость почти всюду равносильна фундаментальности почти всюду. Почти равномерная сходимость равносильна почти равномерной фундаментальности.*

Доказательство. В простую сторону для обеих сходимостей очевидно. Будем доказывать только в сложную сторону.

Сначала докажем для сходимости почти всюду. Пусть функции $\{f_n\}$ фундаментальны на множестве A , и $\mu(X \setminus A) = 0$. Тогда функции $f_n \mathcal{I}_A$ фундаментальны всюду, а потому сходятся к измеримой функции f . Тогда f_n сходятся к f почти всюду.

Теперь докажем для почти равномерной сходимости. Пусть функции $\{f_n\}$ фундаментальны почти равномерно. Тогда они фундаментальны почти всюду, и потому сходятся почти всюду к некоторой измеримой f . Тогда на каждом множестве $X \setminus E_\gamma$ из равномерной фундаментальности и поточечной сходимости к f следует и равномерная сходимость к f . $\square$

Теорема 9.9 (Критерий Коши сходимости по мере). *Сходимость по мере равносильна фундаментальности по мере.*

В отличие от предыдущих упражнений, эта теорема сложнее и требует божественного вмешательства.

Лемма 9.10. *Из фундаментальной по мере последовательности можно выделить почти равномерно фундаментальную подпоследовательность.*

Доказательство. Здесь идея похожа на доказательство теоремы Егорова, но константы подбираются жёстче. Проблема выбора констант обусловлена ещё тем, что номера подпоследовательности не должны зависеть от констант ε, γ .

Буквально по определению фундаментальности по мере существует такая последовательность чисел n_k , что для любых $n, m \geq n_k$

$$\mu\left\{|f_n - f_m| > \frac{1}{2^k}\right\} < \frac{1}{2^k}.$$

Рассмотрим «плохие для соседей множества»

$$E_k := \left\{|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| > \frac{1}{2^k}\right\}.$$

Теперь для произвольного $\gamma > 0$ возьмём

$$E_\gamma := \bigcup_{k \geq K} E_k,$$

где хвост выбран достаточно маленьким (а K достаточно большим), чтобы обеспечить $\mu(E_\gamma) < \gamma$. Остаётся заметить, что вне E_γ сходимость f_{n_k} равномерная, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших $j > i > K$ для всех $x \in X \setminus E_\gamma$

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| \leq \sum_{\ell=i}^{j-1} |f_{n_\ell}(x) - f_{n_{\ell+1}}(x)| \leq \frac{1}{2^{i-1}} < \varepsilon.$$

Последнее обеспечивается дополнительным ограничением на i . $\square$

Доказательство критерия Коши сходимости по мере. Сперва докажем простую часть, что из сходимости по мере следует фундаментальность по мере. Это снова получается из неравенства треугольника, поскольку

$$\{|f_n - f_m| > 2\varepsilon\} \subset \{|f_m - f| > \varepsilon\} \cup \{|f_n - f| > \varepsilon\}.$$

Осталось доказать сложную часть. Доказательство очень напоминает аналогичный критерий для числовых последовательностей, так что неплохо бы его вспомнить: там устанавливалась ограниченность последовательности, из неё извлекалась сходящаяся подпоследовательность, а дальше доказывалось, что сама последовательность сходится туда же.

Итак, мы по лемме 9.10 сразу можем выделить почти равномерно фундаментальную подпоследовательность f_{n_k} (таким образом, сделали уже два шага из трёх, если сравнивать с классическим случаем). Эти функции почти равномерно сходятся к некоей функции f . По утверждению 9.7, функции f_{n_k} сходятся по мере к той же функции f . В качестве упражнения предлагается доказать, что тогда и все f_n сходятся по мере к той же f (нужно снова применить неравенство треугольника). $\square$

Следствие 9.11. *Из любой последовательности сходящихся по мере функций можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти равномерно (к той же функции).*

Доказательство. Теперь это совсем легко. Из сходимости по мере следует фундаментальность по мере. (То есть здесь мы пользуемся критерием Коши сходимости по мере только в простую сторону.) Тогда можно выделить подпоследовательность, фундаментальную почти равномерно. Она сходится почти равномерно к некоторой функции. Это обязана быть именно функция, являющаяся пределом по мере, в силу того, что почти равномерная сходимость влечёт сходимость по мере, и в силу единственности предела по мере. $\square$

Как следствие, получили наконец и теорему Рисса: просто гуляем по двум стрелочкам.

В качестве завершающего штриха, обсудим наследование сходимостей под действием арифметических операций и вообще непрерывных функций.

Утверждение 9.12. *Сходимости почти всюду и по мере наследуются для линейных комбинаций.*

Доказательство. Для умножения на константу это понятно, так что рассмотрим только сложение. Для сходимости почти всюду это просто, но нужно быть аккуратнее, если мера не полна: множество, где нет сходимости, измеримо (потому что все функции измеримы) и является подмножеством множества нулевой меры. Для сходимости по мере снова неравенство треугольника. $\square$

Здесь нам понадобится следующее понятие. Образом меры μ при отображении $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется борелевская мера $\mu \circ f^{-1}$, определяемая как

$$\mu \circ f^{-1}(B) := \mu(f^{-1}(B)) = \mu\{f \in B\}.$$

В теории вероятностей такую меру будут называть *распределением случайной величины f* и обозначать через P_f . Приведём следующий пример: для случайной величины $\xi \sim \text{Pois}(\lambda)$ её распределение задаётся как

$$P_\xi(B) = P \circ \xi^{-1}(B) = P(\xi \in B) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cap B} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

Теорема 9.13 (Наследование сходимости). *Пусть измеримые функции f_n сходятся к измеримой f почти всюду или по мере, и, в случае сходимости по мере, пространство конечной меры. Пусть борелевская функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна $\mu \circ f^{-1}$ -п.в., т. е. непрерывна на таком борелевском множестве $B \subset \mathbb{R}$, что $\mu\{f \notin B\} = 0$. Тогда для функций $g \circ f_n$ наследуется сходимость к $g \circ f$.*

Под наследованием сходимости подразумевается, что если была сходимость п.в., то и для композиций будет сходимость п.в., а если была сходимость по мере, то и для композиций будет сходимость по мере.

Контрпример, показывающий, что для наследования сходимости по мере важна конечность меры, таков. Рассмотрим классическую меру Лебега λ на $\mathbb{R}$, и функции $f_n(x) := x + \frac{1}{n}$. Они по мере сходятся к функции id , поскольку начиная с некоторого номера меры плохих множеств равны нулю. Однако при навешивании функции $g(x) = x^2$ сходимость по мере не наследуется, ибо мера плохих множеств теперь всегда бесконечна.

В свете предыдущего контрпримера, могут показаться удивительными задачи 9.5, 9.6.

Доказательство наследования сходимости п.в. Множество

$$\{g \circ f_n \rightarrow g \circ f\} \supset \{f_n \rightarrow f\} \cap \{f \in B\}$$

измеримо, а тогда множество

$$\{g \circ f_n \not\rightarrow g \circ f\} \subset \{f_n \not\rightarrow f\} \cup \{f \notin B\}$$

имеет меру ноль. □

Лемма 9.14 (Критерий сходимости по конечной мере). *На пространстве конечной меры сходимость функций $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$ равносильна тому, что у любой последовательности номеров n_m можно выделить такую подпоследовательность номеров n_{m_k} , что $f_{n_{m_k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{n.б.} f$.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы Рисса. Достаточность докажем от противного. Отсутствие сходимости по мере означает, что для некоторых $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ нашлась последовательность номеров n_m , для которых

$$\mu\{|f_{n_m} - f| > \varepsilon\} > \varepsilon'.$$

При этом по условию можно выделить подпоследовательность $f_{n_{m_k}}$, сходящуюся к f почти всюду. Раз мера конечна, то эта же подпоследовательность сходится к f по мере, что приводит к противоречию. □

Доказательство наследования сходимости по конечной мере. По критерию сходимости по конечной мере, достаточно для произвольной последовательности номеров n_m так выделить подпоследовательность, чтобы $g \circ f_{n_{m_k}}$ сходились к $g \circ f$ почти всюду. Поскольку f_{n_m} сходятся к f по мере, то теорема Рисса даст нужную подпоследовательность, и теорема о наследовании сходимости п.в. завершит доказательство. □

Наследование сходимости эффективно применяется в математической статистике, когда речь заходит про построение оценок некоей величины. Например, проведены эксперименты с результатами $X_1, \dots, X_n$. Известно, что у них у всех одинаковое среднее a , но нужно оценить параметр a^2 . Здравый смысл подсказывает, что раз по Закону Больших Чисел усреднение $\bar{X} := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ хорошо оценивает (читай: сходится по вероятности к) среднее a , то $(\bar{X})^2$ должно хорошо оценивать a^2 . Теорема о наследовании сходимости гарантирует, что это действительно так.

Вот чуть более хитрый пример. Пусть для некоторой функции h существует производная только в точке a . Нужно оценить $h'(a)$. Как мы уже выяснили, $\bar{X} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} a$. Рассмотрим функцию

$$H(x) := \begin{cases} \frac{h(a+x)-h(a)}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ h'(a), & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Она непрерывна в точке a . Следовательно, она непрерывна $\mu \circ a^{-1}$ -п.в., и этого достаточно для применения теоремы о наследовании сходимости! В итоге, получаем $H(\bar{X}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} H(a) = h'(a)$.

Отсюда можно получить и наследование сходимости для умножения.

Теорема 9.15. *Пусть измеримые функции f_n сходятся к измеримой f почти всюду или по мере, измеримые g_n сходятся к g в том же смысле и, в случае сходимости по мере, пространство конечной меры. Тогда $f_n g_n$ сходится к $f g$ в том же смысле.*

Доказательство. Нужно воспользоваться тем, что

$$f_n g_n = \frac{(f_n + g_n)^2 - f_n^2 - g_n^2}{2}.$$

□

Теорема 9.16. *В посылках предыдущей теоремы, пусть дополнительно $g \neq 0$ почти всюду. Тогда f_n/g_n сходятся к f/g в том же смысле.*

Доказательство. Следует из предыдущей теоремы в силу того, что функцию $x \mapsto 1/x$ можно переопределить в нуле любым конечным значением. $\square$

Таким образом, у нас доказано наследование сходимостей для всех арифметических операций (для сходимости по мере — только в случае конечной меры; но в конце концов, в приложениях ТВ нам как раз такой случай и понадобится).

§10. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

If you turn your back on Mishnory and walk away from it, you are still on the Mishnory road . . . you must have another goal; then you walk a different road

Ursula K. Le Guin

Здесь мы снова фиксируем произвольное измеримое пространство (X, σ_X, μ) с $(\sigma$ -аддитивной) мерой μ , и рассматриваем измеримые функции $(X, \sigma_X) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Им разрешено принимать бесконечные значения, но лишь на множестве нулевой меры; мы не заостряем на этом внимание.

Простая функция $\varphi = \sum_{y \in \text{Im } \varphi} y \mathcal{I}\{\varphi = y\}$ интегрируема по мере μ , если $\mu\{\varphi \neq 0\} < \infty$. В таком случае интеграл от простой функции φ по мере μ определяется как

$$\int \varphi(x) d\mu(x) \equiv \int \varphi d\mu \equiv \int \varphi := \sum_{y \in \text{Im } \varphi} y \mu\{\varphi = y\},$$

где считается, что $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$. Определение должно навевать приятные ассоциации с математическим ожиданием. Чаще всего мы будем пользоваться последним обозначением, поскольку обычно понятно, по какой мере берётся интеграл. Нетрудно понять, что на пространстве конечной меры любая ограниченная простая функция интегрируема.

Обычно интеграл Лебега определяют иначе: для представления $\varphi = \sum_{n=1}^N c_n \mathcal{I}(A_n)$ пишут

$$\int \varphi = \sum_{n=1}^N c_n \mu(A_n).$$

Если все A_n дизъюнкты, это равенство следует по определению в силу аддитивности меры. Для произвольного представления мы получим это как следствие линейности интеграла.

Интеграл от простой функции φ по множеству $E \in \sigma_X$ определяется как

$$\int_E \varphi := \int \varphi \mathcal{I}_E.$$

Например, для $\varphi = 1$ имеем

$$\int_E 1 = \int \mathcal{I}_E = \mu(E),$$

откуда легко видеть, что константа интегрируема только на пространстве конечной меры.

Утверждение 10.1. *Здесь мы рассматриваем только простые функции.*

- (i) Интеграл Лебега линеен по функции.
- (ii) Интеграл Лебега аддитивен по множеству.
- (iii) Интеграл Лебега монотонен по (интегрируемой) функции.
- (iv) Любая функция φ интегрируема только вместе со своим модулем, и

$$\left| \int \varphi \right| \leq \int |\varphi|.$$

- (v) Для любых интегрируемых φ, ψ

$$\int |\varphi + \psi| \leq \int |\varphi| + \int |\psi|.$$

Доказательство. Для доказательства линейности сперва докажем, что можно выносить константу: для $\alpha = 0$ это очевидно, а при $\alpha \neq 0$

$$\int \alpha \varphi = \sum_{y \in \text{Im } \varphi} \alpha y \mu\{\alpha \varphi = \alpha y\} = \alpha \int \varphi.$$

Интегрируемость суммы следует из того, что $\{\varphi + \psi \neq 0\} \subset \{\varphi \neq 0\} \cup \{\psi \neq 0\}$. Аддитивность по функции

$$\int (\varphi + \psi) = \sum_{y, z} (y + z) \mu\{\varphi = y, \psi = z\} = \int \varphi + \int \psi$$

теперь следует из независимости интеграла от представления простой функции в виде индикаторов попарно дизъюнктивных множеств.

Аддитивность по множеству следует из аддитивности по функциям.

Монотонность следует из того, что интеграл от неотрицательной функции неотрицателен.

Функция интегрируема вместе с модулем, поскольку $\{\varphi \neq 0\} = \{|\varphi| \neq 0\}$. Неравенство в (iv) следует из монотонности и $-|\varphi| \leq \varphi \leq |\varphi|$.

Последнее следует по монотонности и аддитивности из $|\varphi + \psi| \leq |\varphi| + |\psi|$. $\square$

Мы определим интеграл Лебега от измеримой функции через предельный переход, используя понятие заряда. Нам придётся немного повозиться с этим понятием, зато потом почти бесплатно получим остальные свойства.

Зарядом будем называть конечную σ -аддитивную меру со знаком; то есть это σ -аддитивное отображение $\sigma_X \rightarrow \mathbb{R}$. (Термин «заряд» связан, конечно, с физикой, где есть $+$ и $-$.) Поначалу мы будем называть зарядами просто отображения множеств, но они все у нас получатся σ -аддитивными, так что мы сразу заложили это в определение. Стоит заметить, что в определении σ -аддитивности ряды получатся сходящимися абсолютно: например, по теореме Римана (о перестановке слагаемых условно сходящегося ряда), или даже просто исходя из того, что в условно сходящемся ряде обе его положительные и отрицательные части расходятся. Отсюда получаем непрерывность заряда сверху и снизу, аналогично случаю с мерами.

Неопределённым интегралом простой интегрируемой φ называется заряд $Q_\varphi: \sigma_X \rightarrow \mathbb{R}$, определяемый как

$$Q_\varphi(E) := \int_E \varphi d\mu.$$

По сути, это даже не новое определение, а всё тот же интеграл от функции по множеству. Просто теперь сместились акценты: в фокусе оказалось множество, а не функция.

Упражнение 10.А. Для любых интегрируемых простых φ, ψ и констант α, β выполнено

$$Q_{\alpha\varphi+\beta\psi} = \alpha Q_\varphi + \beta Q_\psi.$$

Утверждение 10.2. Неопределённый интеграл Q_φ действительно является зарядом.

Доказательство. Конечность и аддитивность уже доказаны, осталась только σ -аддитивность. Для индикатора это сводится к σ -аддитивности меры μ . Для произвольной функции её нужно представить в виде конечной линейной комбинации индикаторов. $\square$

Таким образом, если φ п.в. неотрицательна, то её неопределённый интеграл является конечной σ -аддитивной мерой (то есть неотрицательным зарядом).

Заряд Q называется **абсолютно непрерывным относительно меры μ** , пишут $Q \ll \mu$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая $\delta > 0$, что $|Q(E)| < \varepsilon$ для всякого $E \in \sigma_X$, удовлетворяющего $\mu(E) < \delta$. Иными словами, абсолютная непрерывность означает

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} Q(E) = 0.$$

Отсюда хорошо видно, что для конечной меры μ свойство абсолютной непрерывности сильнее непрерывности сверху в нуле, которая записывается как

$$\lim_{E \searrow \emptyset} Q(E) = 0.$$

Лемма 10.3. Из абсолютной непрерывности $Q \ll \mu$ следует, что $Q(E) = 0$ для всякого $E \in \sigma_X$, удовлетворяющего $\mu(E) = 0$.

Доказательство. Следует из свойств предела. Или по контрапозиции: если $\mu(E) = 0$ и $Q(E) \neq 0$ для некоторого E , то для $\varepsilon = |Q(E)|/2$ нарушается абсолютная непрерывность. $\square$

На самом деле, верно и обратное! Но мы не будем этим пользоваться, и это не так просто доказывается.

Утверждение 10.4. Для простой интегрируемой φ выполнено $Q_\varphi \ll \mu$, то есть интеграл Лебега от простой функции абсолютно непрерывен.

Доказательство. Следует из неравенства $|Q_\varphi(E)| \leq \max \operatorname{Im} |\varphi| \cdot \mu(E)$. $\square$

Скоро нам понадобится функция расстояния $\rho(\varphi, \psi)$, определяемая для простых интегрируемых функций как

$$\rho(\varphi, \psi) := \int |\varphi - \psi|.$$

Упражнение 10.В. Функция расстояния симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника. Кроме того, $\rho(\varphi, \psi) = 0$ равносильно эквивалентности функций.

Простые функции φ_n сходятся в среднем к простой функции φ , если $\rho(\varphi_n, \varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Простые функции φ_n фундаментальны в среднем, если $\rho(\varphi_n, \varphi_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$.

Замечание. В следующем семестре вместо «в среднем» вы будете говорить «в L_1 », но мы не будем этого делать, чтобы не плодить лишние непонятные обозначения.

Наконец, измеримая функция f **интегрируема**, если существует фундаментальная в среднем последовательность простых интегрируемых функций φ_n , сходящаяся по мере к f . (Иногда для краткости мы будем говорить, что функции φ_n определяют интегрируемость функции f .) В таком случае хочется определить интеграл Лебега

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n.$$

Поскольку для произвольного $E \in \sigma_X$ функции $\varphi_n \mathcal{I}_E$ тоже фундаментальны в среднем и сходятся по мере к $f \mathcal{I}_E$, то должно работать и определение

$$\int_E f = \int f \mathcal{I}_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n \mathcal{I}_E.$$

Следуя этой же логике, определим **неопределённый интеграл** $Q_f: \sigma_X \rightarrow \mathbb{R}$ как заряд

$$Q_f(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{\varphi_n}(E).$$

Теперь, полагая

$$\int f := Q_f(X) \quad \text{и} \quad \int_E f := Q_f(E),$$

действительно получаем формулы для интеграла выше.

Таким образом, нам нужно лишь доказать корректность определения неопределённого интеграла. Корректность означает, во-первых, существование конечного предела, являющегося зарядом, а во-вторых, независимость от выбора последовательности простых функций. Следующие три утверждения посвящены этой корректности.

Утверждение 10.5. Если простые интегрируемые функции φ_n фундаментальны в среднем, то можно определить заряд $Q: \sigma_X \rightarrow \mathbb{R}$ как равномерный предел

$$Q(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{\varphi_n}(E).$$

Доказательство. Последовательность чисел $Q_{\varphi_n}(E)$ фундаментальна равномерно по E , поскольку

$$|Q_{\varphi_n}(E) - Q_{\varphi_m}(E)| \leq \int |\varphi_n - \varphi_m| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Отсюда следует существование конечного предела $Q(E)$. Его аддитивность следует из свойств предела. Для доказательства σ -аддитивности рассмотрим $E = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} E_i$ и оценим

$$\left| Q(E) - \sum_{i=1}^k Q(E_i) \right| \leq |Q(E) - Q_{\varphi_n}(E)| + \left| Q_{\varphi_n}(E) - \sum_{i=1}^k Q_{\varphi_n}(E_i) \right| + \left| Q_{\varphi_n}\left(\bigsqcup_{i=1}^k E_i\right) - Q\left(\bigsqcup_{i=1}^k E_i\right) \right|.$$

Первое и третье слагаемые можно сделать сколь угодно малыми при достаточно большом n (в силу того, что предел определён равномерно по E). При фиксированном n второе слагаемое можно сделать сколь угодно малым при достаточно большом k (в силу σ -аддитивности заряда Q_{φ_n}). $\square$

Таким образом, неопределённый интеграл, и, как следствие, сам интеграл $\int f = Q_f(X)$, действительно можно определять как пределы. Кроме того, неопределённый интеграл является зарядом. Осталось показать независимость этого предела от выбранной последовательности.

Здесь нам понадобится следующее понятие, так или иначе возникающее, когда интеграл определяют через пределы простых функций. Заряды $Q_1, Q_2, \dots$ **равностепенно абсолютно непрерывны** (относительно меры μ), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая $\delta > 0$, что $|Q_n(E)| < \varepsilon$ при всех n для всякого $E \in \sigma_X$, удовлетворяющего $\mu(E) < \delta$. Иными словами, равностепенная абсолютная непрерывность означает

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} |Q_n(E)| = 0.$$

Утверждение 10.6. *Если простые интегрируемые функции φ_n фундаментальны в среднем, то заряды Q_{φ_n} равностепенно абсолютно непрерывны.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу фундаментальности в среднем, начиная с некоторого N для всех $n, m \geq N$ выполнено $\rho(\varphi_n, \varphi_m) < \varepsilon$. Из абсолютной непрерывности зарядов простых функций $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ подберём такое $\delta > 0$, что для любого E с $\mu(E) < \delta$

$$|Q_{\varphi_n}(E)| < \varepsilon, \quad n = 1, \dots, N.$$

Утверждение следует из того, что при всех $n > N$

$$|Q_{\varphi_n}(E)| \leq \rho(\varphi_n, \varphi_N) + |Q_{\varphi_N}(E)| < 2\varepsilon.$$

$\square$

Утверждение 10.7. *Определение неопределённого интеграла не зависит от выбора последовательности простых функций.*

Доказательство. Пусть простые интегрируемые функции φ_n фундаментальны в среднем и сходятся к измеримой f по мере, и таковы же ψ_n . Для фиксированного $\varepsilon > 0$ обозначим

$$E_n := \{|\varphi_n - \psi_n| > \varepsilon\}.$$

По неравенству треугольника, $\mu(E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Тогда для произвольного измеримого E конечной меры имеем

$$\int_E |\varphi_n - \psi_n| \leq \int_{E \setminus E_n} |\varphi_n - \psi_n| + \int_{E \cap E_n} |\varphi_n| + \int_{E \cap E_n} |\psi_n| \leq \varepsilon \mu(E) + o(1) + o(1),$$

где o -малые появились в силу равностепенной абсолютной непрерывности. Поэтому на множествах E конечной меры неопределённый интеграл действительно не зависит от выбора последовательности. В силу уже доказанной σ -аддитивности построенных пределов, получаем независимость и для множеств σ -конечной меры. Наконец, для множеств бесконечной меры нужно заметить, что множество, на котором хоть какая-то из функций отлична от нуля, является множеством σ -конечной меры. $\square$

Таким образом, корректность определения интеграла доказана. В частности, отсюда следует согласованность двух определений интегрируемости для простой функции: она сама себе является последовательностью функций, определяющих интегрируемость.

Утверждение 10.8. Абсолютная величина интегрируемой функции, произведение интегрируемой функции и константы, и сумма двух интегрируемых функций представляют собой интегрируемые функции. Функции f^+ и f^- интегрируемы вместе с f .

Указания. Для первых трёх случаев нужно рассмотреть $|\varphi_n|$, $c\varphi_n$ и $\varphi_n + \psi_n$, соответственно. Последнее следует из того, что $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ и $f^- = \frac{|f|-f}{2}$. $\square$

Обратите внимание, что пока что мы не умеем доказывать обратное: из интегрируемости абсолютного значения следует интегрируемость и самой функции. Это мы получим позже из предельных теорем. Это может показаться странным, но можно рассудить так: из нетехнического определения технические результаты появляются несложно.

Утверждение 10.9. (i) Интеграл Лебега линеен по функции.

(ii) Интеграл Лебега σ -аддитивен по множеству.

(iii) Интеграл Лебега монотонен по функции.

(iv) Для любой интегрируемой f

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

(v) Для любых интегрируемых f, g

$$\int |f + g| \leq \int |f| + \int |g|.$$

Доказательство. Линейность по интегрируемым функциям следует из свойств предела. Счётная аддитивность по множеству — это свойство заряда. Монотонность следует из того, что если интегрируемость неотрицательной функции определялась простыми φ_n , то можно взять и $|\varphi_n|$. Оставшиеся два свойства доказываются аналогично свойствам с простыми функциями. $\square$

Утверждение 10.10. Неопределённый интеграл абсолютно непрерывен.

Доказательство. Рассмотрим простые φ_n , фундаментальные в среднем и сходящиеся к f по мере. Для всех измеримых E

$$\left| \int_E f \right| \leq \left| \int_E \varphi_n \right| + \left| \int_E f - \int_E \varphi_n \right|.$$

Тогда первое слагаемое сколь угодно мало при малой $\mu(E)$ равномерно по n , а второе слагаемое сколь угодно мало при достаточно больших n равномерно по E . $\square$

Как мы увидим в конце курса, обратное тоже верно: абсолютно непрерывные заряды обязаны являться чьими-то неопределёнными интегралами!

Теперь можно определить и **сходимость в среднем** интегрируемых функций f_n к интегрируемой f как $\rho(f, f_n) := \int |f - f_n| \rightarrow 0$. Аналогично с **фундаментальностью в среднем**.

Упражнение 10.С. Если f_n сходятся к f в среднем, то $\int f_n \rightarrow \int f$, и даже $Q_{f_n} \rightrightarrows Q_f$.

Лемма 10.11. Для фундаментальных в среднем интегрируемых функций их неопределённые интегралы равномерно абсолютно непрерывны и равномерно сходятся к некоторому заряду.

Доказательство. Нужно проверить, что доказательство ничем не отличается от аналогичных доказательств для простых интегрируемых функций. $\square$

Свойства интеграла Лебега

Нижеперечисленные факты названы «теоремами» скорее, чтобы подчеркнуть их значимость, а не из-за сложности их доказательства.

Лемма 10.12. Если f интегрируема, φ простая и почти всюду $|\varphi| \leq f$, то φ интегрируема.

Доказательство. Можно считать, что φ неотрицательна. Рассмотрим простые неотрицательные φ_n , определяющие интегрируемость функции f . Тогда простые функции $\min(\varphi_n, \varphi)$ определяют интегрируемость функции $\min(f, \varphi) = \varphi$ (где равенство п.в.), поскольку они сами интегрируемы, и в силу неравенства $|\min(a, x) - \min(b, x)| \leq |a - b|$ для произвольных неотрицательных чисел a, b, x . $\square$

Следствие 10.13. Для любой неотрицательной интегрируемой f и любой константы $c > 0$ множество $\{f \geq c\}$ имеет конечную меру.

Доказательство. Из $c\mathcal{I}\{f \geq c\} \leq f\mathcal{I}\{f \geq c\}$ и по интегрируемости функции $f\mathcal{I}\{f \geq c\}$. $\square$

Следующая теорема показывает, что на самом деле осмысленно определять интеграл на пространствах σ -конечной меры.

Теорема 10.14. Если функция f интегрируема, то множество $\{f \neq 0\}$ является множеством σ -конечной меры.

Доказательство. Следует из $\{|f| > 0\} = \bigcup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{|f| > \varepsilon\}$. $\square$

Теорема 10.15 (Неравенство Чебышёва). Для любой неотрицательной интегрируемой f , любого измеримого E и любой константы $c > 0$

$$\mu(\{f \geq c\} \cap E) \leq \frac{1}{c} \int_E f.$$

Доказательство. Следует из

$$\int_E f \geq \int_{\{f \geq c\} \cap E} f \geq c \mu(\{f \geq c\} \cap E),$$

поскольку по следствию 10.13 функция $c\mathcal{I}\{f \geq c\}$ интегрируема. $\square$

Следствие 10.16. Из фундаментальности/сходимости в среднем следуют соответственно фундаментальность/сходимость по мере. Обратное неверно.

Смысл этого утверждения в том, что в сходимости по мере рассматриваются просто меры плохих множеств, а в сходимости в среднем эти меры ещё берутся с весами: одни не так плохи, как другие. То есть возникает более тонкая настройка.

Теорема 10.17. Для неотрицательной интегрируемой f условие $\int f = 0$ равносильно тому, что $f = 0$ п.в.

Доказательство. Достаточность следует из того, что можно взять $\varphi_n = 0$. Необходимость следует из неравенства Чебышёва 10.15 ввиду

$$\mu\{f > 0\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mu\{f \geq \varepsilon\} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon} \int f = 0.$$

$\square$

? Мы только что воспользовались непрерывностью меры; а что если мера бесконечна?

Теорема 10.18 (Интегральное свойство). Если f, g суть две интегрируемые функции, интегралы от которых по любому измеримому множеству совпадают, то эти функции эквивалентны.

Иными словами, имеется биекция между классами эквивалентности интегрируемых функций и их неопределёнными интегралами.

Доказательство. Достаточно доказать, что если $\int_E f = 0$ для любого измеримого E , то $f = 0$ почти всюду. Это следует из теоремы 10.17 ввиду того, что $f^+ = 0 = f^-$ п.в. в самом деле,

$$\int f^+ = \int f\mathcal{I}\{f > 0\} = \int_{\{f > 0\}} f = 0,$$

и аналогично для $f^- = -f\mathcal{I}\{f < 0\}$. $\square$

Напоследок приведём две теоремы, связывающие интегралы Римана и Лебега.

Теорема 10.19 (Связь с собственным интегралом по Риману; б/д). *Если функция интегрируема по Риману в собственном смысле на отрезке, то она интегрируема и по Лебегу на этом отрезке, и интегралы совпадают.*

Теорема 10.20 (Связь с несобственным интегралом по Риману; б/д). *Если функция интегрируема по Риману в несобственном смысле на промежутке вместе со своей абсолютной величиной, то она интегрируема и по Лебегу на этом промежутке, и интегралы совпадают.*

§11. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ

Il ne distinguait pas, cet homme si plein de pratique, la dissemblance des sentiments sous la parité des expressions. [Сходство в оборотах речи заслоняло от этого слишком трезвого человека разницу в оттенках чувства.]

G. Flaubert

Теорема 11.1 (Критерий Коши сходимости в среднем). *Последовательность интегрируемых функций сходится в среднем тогда и только тогда, когда она фундаментальна в среднем.*

Необходимость легко следует из неравенства треугольника. С достаточностью проблемы. Мы знаем только, что из фундаментальности в среднем следует сходимость по мере, но напрямую отсюда ничего не получить. Так что сначала докажем следующий частный случай. Идея доказательства похожа на идею для равномерной фундаментальности; см. упражнение 9.А.

Доказательство достаточности для простых функций. Здесь нужно несколько раз воспользоваться неравенством

$$||a - x| - |b - x|| \leq |a - b|.$$

Рассмотрим простые фундаментальные в среднем φ_n ; они сходятся по мере к некоторой f . При любом фиксированном m последовательность $\{|\varphi_n - \varphi_m|\}_{n \in \mathbb{N}}$ простых функций фундаментальна в среднем и сходится по мере к $|f - \varphi_m|$. Поэтому по определению интеграла функции $|f - \varphi_m|$ имеем

$$\int |f - \varphi_m| = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |\varphi_n - \varphi_m|.$$

Остаётся воспользоваться фундаментальностью в среднем последовательности $\{\varphi_m\}$, устремив $m \rightarrow \infty$. $\square$

Таким образом, мы наконец доказали, что простые функции из определения интегрируемости сходятся не просто по мере, а в среднем.

Следствие 11.2. *Пространство простых функций всюду плотно в среднем в пространстве интегрируемых функций; иными словами, для любой интегрируемой функции f и любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая простая функция φ , что $\rho(f, \varphi) < \varepsilon$.*

Доказательство достаточности в критерии Коши сходимости в среднем. Рассмотрим последовательность фундаментальных в среднем интегрируемых функций f_n . В силу следствий выше, для каждого n можно найти такую простую φ_n , что $\rho(f_n, \varphi_n) < \frac{1}{n}$. Таким образом, φ_n фундаментальны в среднем. По уже доказанному, они сходятся в среднем к некоторой f , и

$$\rho(f_n, f) \leq \rho(f_n, \varphi_n) + \rho(\varphi_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$\square$

Мы, наконец, добрались до трёх известных предельных теорем: Лебега, Леви и Фату. Студенты почему-то их всегда путают; лайфхак состоит в том, чтобы запоминать их не только по именам, но и по типу сходимости: мажорируемая, монотонная, или о нижнем пределе.

Упражнение 11.А. Приведите пример, когда интегрируемые f_n сходятся к интегрируемой f почти всюду или по мере, но не сходятся в среднем.

Теорема 11.3 (Лебег; о мажорируемой сходимости). Пусть интегрируемые f_n сходятся к измеримой f по мере или почти всюду, и почти всюду $|f_n| \leq F$ для некоторой интегрируемой функции F . Тогда f_n сходятся к f в среднем; в частности, f интегрируема.

Для доказательства сперва научимся переходить от сходимости почти всюду к сходимости по мере.

Утверждение 11.4. Если f_n сходятся почти всюду к функции f , и почти всюду $|f_n| \leq F$ для некоторой интегрируемой F , то f_n сходятся к f и по мере.

Доказательство. Для конечной меры это верно и без интегрируемой мажоранты. Вспомним, как мы это доказывали. Для произвольного ε положим

$$E_n := \left\{ \sup_{i \geq n} |f_i - f| \geq \varepsilon \right\}.$$

Мы получали, что сходимость почти всюду (для произвольной меры) равносильна тому, что

$$\mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) = 0.$$

Далее нужно было сослаться на непрерывность меры и сказать, что $\mu(E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Отсюда получалась и сходимость по мере.

Вот и теперь нам нужно получить возможность сослаться на непрерывность меры. Заметим, что почти всюду $|f| \leq F$. Тогда для любого фиксированного $\varepsilon > 0$, с точностью до множества нулевой меры,

$$E_n = \left\{ \sup_{i \geq n} |f_i - f| \geq \varepsilon \right\} \subset \left\{ F \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

откуда $\mu(E_n) < \infty$ по следствию 10.13. Следовательно, для множеств E_n работает непрерывность меры. $\square$

Доказательство похоже на аналогичное через критерий сходимости почти всюду для конечной меры, и неспроста: из посылок отняли конечность меры, но добавили интегрируемую мажоранту; чаши весов уравнились, а идея доказательства не поменялась.

Доказательство теоремы Лебега 11.3. Для сходимости почти всюду по утверждению выше переходим к сходимости по мере.

По критерию Коши, достаточно доказать, что последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна в среднем, ибо тогда она будет сходиться в среднем к некоторой интегрируемой функции, которой может быть только функция f (в силу единственности предела по мере). По теореме 10.14 можно считать, что у нас пространство σ -конечной меры; тогда можно представить $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ в виде предела возрастающих к нему множеств A_k конечной меры. (Для Ω конечной меры можно взять $A_k = \Omega$.) Тогда $E_k := \Omega \setminus A_k$ убывают к нулю. В силу $Q_{|f_n|} \leq Q_F$, для любого $\delta > 0$ начиная с некоторого $K \in \mathbb{N}$ для всех $k > K$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{E_k} |f_n| < \frac{\delta}{2}$$

(это свойство называется равностепенной непрерывностью зарядов в нуле), и, следовательно, для всех $n, m \in \mathbb{N}$

$$\int_{E_k} |f_n - f_m| \leq \int_{E_k} |f_n| + \int_{E_k} |f_m| < \delta.$$

Осталось разобраться с интегралами по A_k . Зафиксируем произвольное k . Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим «плохие» множества

$$G_{m,n} := \{|f_n - f_m| \geq \varepsilon\}.$$

Теперь

$$\int_{A_k} |f_n - f_m| = \int_{A_k \setminus G_{m,n}} |f_n - f_m| + \int_{A_k \cap G_{m,n}} |f_n - f_m| \leq \varepsilon \mu(A_k) + \int_{A_k \cap G_{m,n}} |f_n| + \int_{A_k \cap G_{m,n}} |f_m|.$$

В силу $Q_{|f_n|} \leq Q_F$, заряды $Q_{|f_n|}$ равномерно абсолютно непрерывны. Тогда, в силу фундаментальности по мере функций $\{f_n\}$, сумма интегралов выше при достаточно больших n, m сколь угодно мала. С учётом произвольного выбора погрешности ε получаем

$$\overline{\lim}_{m,n \rightarrow \infty} \int_{A_k} |f_n - f_m| = 0.$$

В итоге

$$\overline{\lim}_{m,n \rightarrow \infty} \int |f_n - f_m| \leq \overline{\lim}_{m,n \rightarrow \infty} \int_{A_k} |f_n - f_m| + \overline{\lim}_{m,n \rightarrow \infty} \int_{E_k} |f_n - f_m| \leq \delta.$$

В силу произвольного выбора δ

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \int |f_n - f_m| = 0.$$

□

В последнем переходе получается некоторый парадокс: на «больших» множествах A_k (возрастающих к Ω) верхний предел получился равным 0, в то время как на «маленьких» множествах E_k (убывающих к нулю) верхний предел всего лишь удалось ограничить сверху. Кажущийся парадокс разрешается тем, что множества E_k , хоть и убывают к нулю, могут быть бесконечной меры, в отличие от множеств A_k .

Следствие 11.5. Если f измерима, F интегрируема, и $|f| \leq F$ почти всюду, то f интегрируема.

Доказательство. По теореме 8.5 построим простые функции, сходящиеся к f и не превосходящие $|f|$ по абсолютной величине. Они интегрируемы по лемме 10.12, следовательно, к ним можно применить теорему Лебега. □

Следствие 11.6. Измеримая функция интегрируема только вместе со своей абсолютной величиной.

Доказательство. Новое здесь только то, что если $|f|$ интегрируем, то и f тоже. Это следует из предыдущего следствия для $F = |f|$. □

Упражнение 11.В. Если f интегрируема, а g ограничена почти всюду, то fg интегрируема.

Упражнение 11.С. Если f ограничена почти всюду, а множество E имеет конечную меру, то f интегрируема на E .

Тут стоит отметить, что есть и другое определение интеграла. А именно, для неотрицательной функции f полагаем

$$\int f = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int \varphi,$$

и далее для произвольной функции $f = f^+ - f^-$ определяем интеграл как

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

Такой подход проясняет следующее соглашение: если ровно одна из функций f^+ и f^- неинтегрируема, то $\int f := \pm \infty$, где знак выбирается как у неинтегрируемой функции. Это не меняет определение интегрируемости функции f !

Эквивалентность нашего определения и сформулированного выше легко выводится из следующей теоремы.

Теорема 11.7 (Лéви; о монотонной сходимости). Пусть f_n (могушие принимать и бесконечные значения) являются либо измеримыми неотрицательными, либо интегрируемыми функциями, в обоих случаях нестрого возрастающими к f почти всюду. Тогда $\lim_n \int f_n = \int f$, и, если предел конечен (то есть f интегрируема), то будет сходимость и в среднем.

Доказательство. Докажем сначала часть, где f_n измеримые неотрицательные. Если f интегрируема, теорема следует из теоремы Лебега, где f сама выступает в роли мажоранты. Таким образом, остаётся доказать, что в случае конечности предела интегралов предельная функция интегрируема. Итак, пусть $\lim_n \int f_n < \infty$, тогда последовательность $\int f_n$ фундаментальна. Но, поскольку из двух функций f_n, f_m одна всегда мажорирует другую, то

$$\left| \int f_n - \int f_m \right| = \int |f_n - f_m|,$$

откуда получаем, что $\{f_n\}$ фундаментальны в среднем. Тогда они сходятся в среднем, тогда они сходятся туда же по мере, и по теореме Рисса они сходятся туда же почти всюду — значит, они сходятся в среднем именно к f .

Теперь докажем часть, где f_n интегрируемые. Перейдём к функциям $f_n - f_1$. Они неотрицательные и интегрируемые, и нестрого возрастают почти всюду к $f - f_1$, а потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n - f_1) = \int (f - f_1).$$

Далее к обеим частям равенства можно прибавить конечное число $\int f_1$ независимо от того, конечен предел или нет. $\square$

Обычно из теоремы Леви получают σ -аддитивность интеграла по множествам, но у нас она есть почти с самого начала, поскольку интеграл — это заряд.

Доказательство эквивалентности определений интеграла Лебега. Достаточно рассмотреть неотрицательную измеримую функцию f . По монотонности, для любой простой $\varphi \leq f$ выполнено и $\int \varphi \leq \int f$, откуда получаем, что $\sup \int \varphi \leq \int f$. С другой стороны, беря простые неотрицательные $\varphi_n \nearrow f$, по теореме Леви получаем $\sup \int \varphi \geq \int f$. В итоге, получили равенство супремума и интеграла. $\square$

Следствие 11.8. Пусть функции f_n измеримые неотрицательные. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Доказательство. Нужно применить теорему Леви к частичным суммам. $\square$

Лемма 11.9 (Фату; о нижнем пределе). Для неотрицательных измеримых функций f_n выполнено

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Доказательство. Поскольку неотрицательные $\inf_{m \geq n} f_m$ нестрого возрастают по n к нижнему пределу $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$, то по теореме Леви

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \inf_{m \geq n} f_m \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Во втором переходе нужно воспользоваться тем, что для любых $n < k$ выполнено

$$\int \inf_{m \geq n} f_m \leq \int f_k,$$

что влечёт

$$\int \inf_{m \geq n} f_m \leq \inf_{m \geq n} \int f_m.$$

$\square$

Обычно леммой Фату пользуются, чтобы доказать интегрируемость функции $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Для этого по теореме Леви достаточно, чтобы нижний предел интегралов справа был конечен; иногда выполняется и более сильное условие, что интегралы функций f_n равномерно ограничены некоторой константой.

Напоследок приведём критерий сходимости в среднем, который мы оставляем без доказательства.

Упражнение 11.D. На пространстве конечной меры интегрируемые f_n сходятся в среднем к измеримой f (и f интегрируема) тогда и только тогда, когда f_n сходятся к f по мере и неопределённые интегралы $Q_{|f_1|}, Q_{|f_2|}, \dots$ равномерно абсолютно непрерывны.

§12. ТЕОРЕМА РАДОНА—НИКОДИМА

$$\rho = dm/dV$$

Физика, 5 класс

Зафиксируем измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ с σ -аддитивной σ -конечной мерой μ .

Как мы с вами знаем, по мере μ и интегрируемой функции f можно построить заряд

$$Q(A) = \int_A f d\mu.$$

В таком случае иногда пишут $Q = f \cdot \mu$ или $dQ = f d\mu$, а f называют *плотностью меры μ относительно заряда Q* , или *производной Радона—Никодима*, и обозначают $\frac{dQ}{d\mu}$. (Стоит отметить, что $f \cdot \mu = Q_f$ в наших старых обозначениях. Обозначения изменились, потому что теперь нас интересуют не свойства заряда у интеграла, а то, из какой функции он получен, и по какой мере.) Такое определение корректно, ибо две производные Радона—Никодима по интегральному свойству 10.18 обязательно равны п.в.

Смысл обозначения хорошо виден в задаче 11.7. Обозначение довольно удачное, например, ещё потому, что $\frac{1}{\frac{d\nu}{d\mu}} = \frac{d\mu}{d\nu}$ и $\frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\zeta} = \frac{d\nu}{d\zeta}$ при соответствующей абсолютной непрерывности.

Упражнение 12.A. Пусть Q -измеримые множества порождены некоторым конечным или счётным разбиением $\Omega = \bigsqcup_n \Omega_n$. Найдите производную Радона—Никодима $\frac{dQ}{d\mu}$.

Теорема 12.1 (Радон—Никодим). Заряд Q абсолютно непрерывен относительно σ -конечной меры μ тогда и только тогда, когда существует производная Радона—Никодима $\frac{dQ}{d\mu}$.

Идея доказательства состоит в том, чтобы разложить заряд на положительную и отрицательную части: а именно, выделить две такие (конечные σ -аддитивные) меры Q^+ и Q^- , что $Q = Q^+ - Q^-$. На самом деле, как мы увидим в дальнейшем, нам понадобится даже больше (но об этом потом). Нетрудно понять, что если $f = \frac{dQ}{d\mu}$, то $f^+ = \frac{dQ^+}{d\mu}$ и $f^- = \frac{dQ^-}{d\mu}$.

В качестве наших кандидатов положим

$$Q^+(E) := \sup_{A \subseteq E} Q(A) \quad \text{и} \quad Q^-(E) := - \inf_{A \subseteq E} Q(A) = (-Q)^+(E).$$

Упражнение 12.B. Если заряд Q абсолютно непрерывен (относительно некоторой меры), то кандидаты Q^+, Q^- в меры тоже абсолютно непрерывны.

Например, если заряд является мерой μ , то $\mu^+ = \mu$ и $\mu^- = 0$. Или, например, если заряд является непорядённым интегралом Q_f , то $Q_f^\pm = Q_{f^\pm}$. В общем же случае непонятно, почему вообще полученные значения конечны. Удивительным образом оказывается, что они не просто конечны, а имеет место следующее утверждение.

Утверждение 12.2. В определениях Q^+ и Q^- достигаются супремум и инфимум.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для супремума $Q^+(\Omega)$. Рассмотрим множества A_n , для которых $Q(A_n) \rightarrow Q^+(\Omega)$, и рассмотрим $A := \bigcup_n A_n$. Понятно, что само по себе A не является искомым множеством, потому что начальные элементы объединения могут быть достаточно плохими. Сейчас мы модифицируем множество A , выкинув из него всё лишнее.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ введём обозначения $A_n^1 := A_n$ и $A_n^0 := A \setminus A_n$, а также для $b \in \{0, 1\}^n$ положим $A^b := A_1^{b_1} \cap \dots \cap A_n^{b_n}$. Теперь заметим, что для любого n выполнено

$$A = \bigsqcup_{b \in \{0,1\}^n} A^b.$$

Грубо говоря, с ростом n мы всё точнее нарезаем множество A . Теперь из этой нарезки выберем только множества, дающие положительный (а точнее, неотрицательный) вклад в заряд; а именно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$P_n := \bigsqcup_{\substack{b \in \{0,1\}^n \\ Q(A^b) \geq 0}} A^b.$$

Из построения понятно, что $Q(P_n) \geq 0$. Кроме того, поскольку

$$A_n = \bigsqcup_{\substack{b \in \{0,1\}^n \\ b_n = 1}} A^b,$$

то $Q(P_n) \geq Q(A_n)$. Таким образом, $Q(P_n) \rightarrow Q^+(\Omega)$. Положим

$$P := \varlimsup_{n \rightarrow \infty} P_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} P_k$$

и докажем, что оно является искомым множеством. На самом деле, в качестве искомого множества можно было взять и верхний предел множеств A_n , но тогда бы дальше доказательство было сложнее.

В силу непрерывности заряда,

$$Q(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} P_k\right).$$

Заметим, что для бинарных кодов b, b' множества $A^b, A^{b'}$ либо не пересекаются, либо одно является подмножеством другого — что происходит ровно тогда, когда один бинарный код является префиксом другого. Поэтому при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ каждое объединение $\bigcup_{k=n}^{\infty} P_k$ представимо в виде $P_n \sqcup E_n$, где $Q(E_n) \geq 0$ в силу σ -аддитивности заряда; а именно (хоть нам и не нужен явный вид),

$$E_n := \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} \bigsqcup_{\substack{b \in \{0,1\}^k \\ Q(A^b) \geq 0}} A^b,$$

$$\forall m \in \{n, \dots, k-1\} \forall b' \in \{0,1\}^m : Q(A^{b'}) \geq 0 \implies b' \not\sqsubseteq b$$

где $\sqsubseteq$ обозначает бинарное отношение «быть префиксом». (Стоит отметить, что объединение пересекающихся множеств положительного заряда может иметь отрицательный заряд; в выражении для E_n важно, что удалось получить именно дизъюнктивное объединение.) Следовательно,

$$Q(A_n) \leq Q(P_n) \leq Q\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} P_k\right).$$

Тогда, навешивая предел по n , приходим к $Q^+(\Omega) \leq Q(P)$, что и требовалось. $\square$

Отсюда можно вывести, что любой заряд не просто конечен, а ограничен, принимая значения из отрезка $[-Q^-(\Omega), Q^+(\Omega)]$.

Для удобства будем обозначать через $Q|_A$ заряд, суженный на σ -алгебру $\mathcal{F} \cap A$ подмножеств множества A .

Теорема 12.3 (Разложение Хана). *Для заряда Q существует такое разложение Хана $\Omega = P \sqcup N$, что $Q|_P \geq 0$ и $Q|_N \leq 0$; иными словами, $Q^-(P) = Q^+(N) = 0$; иными словами, P не имеет подмножеств отрицательного заряда, а N не имеет подмножеств положительного*

заряда. Более того, такое разложение единственно в следующем смысле: если $\Omega = P' \sqcup N'$ тоже разложение Хана, то $Q|_{P \Delta P'} = Q|_{N \Delta N'} = 0$.

Доказательство. Для заряда Q рассмотрим множества P, N , на которых достигаются супремумы $Q^+(\Omega)$ и $Q^-(\Omega)$. Докажем, что $Q|_{\Omega \setminus (P \Delta N)} = 0$, то есть что множество $\Omega \setminus (P \Delta N)$ не содержит подмножеств ненулевого заряда. В самом деле, если в дополнении $\Omega \setminus (P \cup N)$ содержится подмножество положительного или отрицательного заряда, его можно добавить к P или N , соответственно. Аналогично, если в пересечении $P \cap N$ содержится подмножество положительного или отрицательного заряда, его можно вычесть из N или P , соответственно. Таким образом, можно как угодно распределить между P, N множество $\Omega \setminus (P \Delta N)$ и добиться того, что $\Omega = P \sqcup N$, где P не имеет подмножеств отрицательного заряда, а N не имеет подмножеств положительного заряда.

Единственность следует из того, что для другого разложения Хана $\Omega = P' \sqcup N'$ имеем $Q|_{P \setminus P'} = 0$, так как вне P' нет подмножеств положительного заряда, а в P нет подмножеств отрицательного заряда. Симметрично доказываем $Q|_{P' \setminus P} = 0$. $\square$

Утверждение 12.4. Возьмём разложение Хана $\Omega = P \sqcup N$ для заряда Q . Тогда для любого множества $A \in \mathcal{F}$ выполнено

$$Q^+(A) = Q(A \cap P), \quad Q^-(A) = -Q(A \cap N),$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для Q^+ . Неравенство

$$Q^+(A) \geq Q(A \cap P)$$

следует в силу того, что слева стоит супремум зарядов всех подмножеств множества A . Рассмотрим любое другое $A' \subset A$. Тогда

$$Q(A') = Q(A' \cap N) + Q(A' \cap P) \leq Q(A \cap P),$$

где равенство следует из аддитивности заряда, а неравенство следует из того, что подмножества множества N имеют неположительный заряд, а подмножества множества P — неотрицательный. Отсюда получаем и

$$Q^+(A) \leq Q(A \cap P).$$

$\square$

Свойство разложения Хана $Q^+(N) = Q^-(P) = 0$ называется взаимной сингулярностью мер.

Формально, меры μ_1, μ_2 на общей σ -алгебре называются **взаимно-сингулярными**, обозначается $\mu_1 \perp \mu_2$, если существует такое разбиение $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$, что $\mu_1(\Omega_2) = \mu_2(\Omega_1) = 0$.

Теорема 12.5 (Разложение Жордана). Для любого заряда Q существует единственное разложение Жордана $Q = Q^+ - Q^-$ на две неотрицательные σ -аддитивные взаимно-сингулярные конечные меры.

Доказательство. В качестве Q^+, Q^- возьмём построенных нами кандидатов. Рассмотрим разложение Хана $\Omega = P \sqcup N$. По утверждению 12.4 сразу получаем, что Q^+, Q^- являются конечными σ -аддитивными мерами, и

$$Q(A) = Q(A \cap P) + Q(A \cap N) = Q^+(A) - Q^-(A).$$

Взаимная сингулярность нами по сути уже доказана.

Докажем единственность. Возьмём другое разложение $Q = \nu^+ - \nu^-$ и множества $P' \sqcup N' = \Omega$ из взаимной сингулярности; то есть, $\nu^+(N') = \nu^-(P') = 0$. Отсюда сразу получаем, что $P' \sqcup N'$ является разложением Хана, а тогда с точностью до множеств нулевого заряда $P = P'$ и $N = N'$. Теперь для любого $A \subset P$ по утверждению 12.4

$$Q^+(A) = Q(A \cap P) = \nu^+(A \cap P) - \nu^-(A \cap P) = \nu^+(A).$$

Аналогично получаем $Q^- = \nu^-$. $\square$

Другой вывод σ -аддитивности и равенства $Q = Q^+ - Q^-$ в разложении Жордана. В качестве разложения возьмём построенных нами кандидатов. Заметим, что $Q^- = (-Q)^+$, так что достаточно доказать все нужные свойства для Q^+ . Докажем, что Q^+ является σ -аддитивной конечной мерой. Конечность функции Q^+ следует из конечности исходного заряда и утверждения 12.2. Неотрицательность следует из $Q(\emptyset) = 0$. Осталось доказать σ -аддитивность. Рассмотрим

$$E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Взяв $A \subset E$ (по утверждению 12.2), на котором достигается супремум $Q^+(E)$, имеем $Q(A \cap E_n) \leq Q^+(E_n)$. Отсюда

$$Q^+(E) = Q(A) = \sum_n Q(A \cap E_n) \leq \sum_n Q^+(E_n).$$

С другой стороны, взяв $A_n \subset E_n$ (по утверждению 12.2), на которых достигаются значения $Q^+(E_n)$, приходим к

$$Q^+(E) \geq Q\left(\bigsqcup_n A_n\right) = \sum_n Q(A_n) = \sum_n Q^+(E_n).$$

Покажем, что мы действительно получили разложение Жордана. Зафиксируем E и рассмотрим произвольное $A \subset E$. Из равенства $Q(A) + Q(E \setminus A) = Q(E)$ получаем $-Q^-(E) + Q(E \setminus A) \leq Q(E)$, откуда $Q^+(E) \leq Q(E) + Q^-(E)$, что окончательно даёт $Q \geq Q^+ - Q^-$. Применяя полученное к заряду $-Q$, получаем $-Q \geq (-Q)^+ - (-Q)^- = Q^- - Q^+$, что завершает доказательство. $\square$

Доказательство теоремы Радона—Никодима 12.1. В одну сторону теорема просто постулирует абсолютную непрерывность интеграла Лебега. Докажем в другую сторону. Используя разложение Жордана, можно считать, что заряд Q неотрицателен (то бишь является конечной σ -аддитивной мерой). Кроме того, по теореме Леви можно считать, что мера μ конечна.

Рассмотрим множество $\mathcal{P}$ неотрицательных интегрируемых функций h , для которых $Q_h \leq Q$ (поточечно на всей $\mathcal{F}$). Введём на $\mathcal{P}$ частичный порядок по поточечному сравнению (почти всюду). Заметим, что $\mathcal{P}$ непусто, так как там, например, лежит тождественный ноль. Покажем, что для $\mathcal{P}$ выполняются условия леммы Цорна. Рассмотрим цепь $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ и положим

$$\alpha := \sup_{h \in \mathcal{C}} Q_h(\Omega) < +\infty.$$

Рассмотрим функции $h_n \in \mathcal{C}$, для которых $Q_{h_n}(\Omega) \nearrow \alpha$. В силу линейной упорядоченности цепи $\mathcal{C}$, функции h_n (нестрого) возрастают к некоторой функции h . Таким образом, по теореме Леви функция h интегрируема, и $Q_h(\Omega) = \alpha$. Покажем, что h является верхней гранью цепи $\mathcal{C}$. Рассмотрим произвольную $g \in \mathcal{C}$. Если $g \leq h_n$ для некоторого n , то $g \leq h$. Если $g \geq h_n$ для всех n , то $g \geq h$ и

$$\alpha \geq Q_g(\Omega) \geq Q_h(\Omega) = \alpha,$$

откуда по теореме 10.17 имеем $g \sim h$. Таким образом, h является верхней гранью цепи $\mathcal{C}$.

Итак, в $\mathcal{P}$ есть максимальный элемент f . Покажем, что это и есть искомая производная Радона—Никодима, то есть что $Q_f = Q$. Предположим противное, что $Q_f(\Omega) < Q(\Omega)$. Тогда для некоторой (достаточно маленькой) константы $\varepsilon > 0$

$$Q(\Omega) - Q_f(\Omega) > \varepsilon \mu(\Omega).$$

Здесь неожиданный поворот: для заряда $Q' := Q - Q_f - \varepsilon \mu$ возьмём разложение Хана $P \sqcup N$; то есть P не имеет подмножеств отрицательного заряда, а N не имеет подмножеств положительного заряда. Заметим, что $\mu(P) > 0$: в самом деле, если это не так, то (в силу абсолютной непрерывности зарядов Q, Q_f) выполнено $Q(P) = Q_f(P) = 0$, а тогда $Q'(P) = 0$, и

$$0 \geq Q'(N) = Q'(\Omega) - Q'(P) = Q'(\Omega) > 0.$$

Отсюда получаем, что функция $\varepsilon \mathcal{I}_P$ не равна нулю почти всюду. Таким образом, показав, что $f + \varepsilon \mathcal{I}_P \in \mathcal{P}$, получим противоречие с максимальностью функции f . Для этого нужно показать, что для любого множества E выполняется

$$Q_f(E) + \varepsilon \mu(E \cap P) \leq Q(E).$$

Это следует из того, что

$$\varepsilon \mu(E \cap P) \leq (Q - Q_f)(E \cap P) \leq (Q - Q_f)(E),$$

где первое неравенство следует из определения множества P , а второе следует из неотрицательности меры $Q - Q_f$. $\square$

Стоит отметить, что теорему Радона—Никодима можно с небольшими дополнительными ухищрениями доказывать и без леммы Цорна.

В чём смысл производной Радона—Никодима? Например, если функция $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ достаточно хорошая, то её мера Лебега—Стилтьеса μ_F окажется абсолютно непрерывной относительно меры λ , и по теореме Радона—Никодима у неё должна существовать производная $\frac{d\mu_F}{d\lambda}$.

Сейчас мы поясним, что значит «достаточно хорошая функция». Функция $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая $\delta > 0$, что $\sum_{n=1}^N |F(a_n) - F(b_n)| < \varepsilon$ для любого конечного семейства непересекающихся интервалов $(a_n, b_n) \subset \mathbb{R}$ суммарной длины меньше δ . То есть, для монотонной ограниченной функции F это проверка свойства $\mu_F \ll \lambda$ на элементах наименьшего кольца над системой интервалов.

Пример: если мера Лебега—Стилтьеса μ_F абсолютно непрерывна относительно λ , то функция F абсолютно непрерывна.

Упражнение 12.С. Любая абсолютно непрерывная функция является равномерно непрерывной.

Упражнение 12.Д. Если у функции есть ограниченная производная, то эта функция абсолютно непрерывна.

Что же хорошего в абсолютно непрерывных мерах? Оказывается, с ними можно хорошо брать производную. Но сначала покажем пример, когда всё плохо. Рассмотрим канторову лестницу $c: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Она принимает постоянные значения на интервалах, объединение которых имеет меру всего отрезка, а потому $c' = 0$ почти всюду. Таким образом, для канторовой лестницы не выполняется формула Ньютона—Лейбница. Что, тем не менее, не мешает строить по ней меру Лебега—Стилтьеса (которая не будет(!) абсолютно непрерывной относительно λ) и брать интеграл.

Теорема 12.6 (Формула Ньютона—Лейбница; б/д). Функция $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда она почти всюду на отрезке дифференцируема, её производная F' интегрируема, и для всех $x \in [a, b]$

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) d\lambda(t).$$

Стоит отметить, что достаточность в этой теореме следует из абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Пример. Вернёмся к теореме Радона—Никодима. Для функций на прямой абсолютная непрерывность интеграла Лебега равносильна абсолютной непрерывности функции

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) d\lambda(t).$$

По этой функции можно построить заряд на борелевской σ -алгебре, у которого должна существовать производная Радона—Никодима. Это и будет функция f , которая по формуле Ньютона—Лейбница обязана совпадать с F' почти всюду.

Посмотрим ещё немного на применение теоремы Радона—Никодима и разложения Жордана. Следующая теорема утверждает, что даже если меры изначально не являлись абсолютно непрерывными друг относительно друга, их можно такими сделать, отбросив лишнюю часть.

Теорема 12.7 (Разложение Лебега). Пусть μ, ν суть две конечные меры на общей σ -алгебре. Тогда существуют такие меры ν_a и ν_s , что

$$\nu = \nu_a + \nu_s, \quad \nu_a \ll \mu, \quad \nu_s \perp \mu.$$

Доказательство. Рассмотрим меру $\zeta := \mu + \nu$. Очевидно, что $\mu, \nu \ll \zeta$. По теореме Радона—Никодима 12.1, корректно определить

$$f := \frac{d\nu/d\zeta}{d\mu/d\zeta} \mathcal{I} \left\{ \frac{d\mu}{d\zeta} \neq 0 \right\}.$$

Остаётся положить $\nu_a := Q_f = f \cdot \mu$ и $\nu_s(A) := \nu \left(A \cap \left\{ \frac{d\mu}{d\zeta} = 0 \right\} \right)$.

Проверим, что мы получили нужное разложение. Абсолютная непрерывность $\nu_a \ll \mu$ является свойством неопределённого интеграла. Взаимная сингулярность $\nu_s \perp \mu$ следует из того, что $\nu_s = 0$ вне $\left\{ \frac{d\mu}{d\zeta} = 0 \right\}$, а $\mu = 0$ на этом множестве. Наконец, $\nu = \nu_a + \nu_s$: в самом деле, $\nu_a \ll \mu \ll \zeta$, что по задаче 11.7 даёт

$$\frac{d\nu_a}{d\zeta} = \frac{d\nu_a}{d\mu} \frac{d\mu}{d\zeta} = f \frac{d\mu}{d\zeta} = \frac{d\nu}{d\zeta} \mathcal{I} \left\{ \frac{d\mu}{d\zeta} \neq 0 \right\},$$

откуда

$$\nu_a(A) = \int_A \frac{d\nu_a}{d\zeta} d\zeta = \int_{A \cap \left\{ \frac{d\mu}{d\zeta} \neq 0 \right\}} \frac{d\nu}{d\zeta} d\zeta = \nu \left(A \cap \left\{ \frac{d\mu}{d\zeta} \neq 0 \right\} \right).$$

□

Разложение Лебега легко переносится на случай, когда меры являются зарядами, но мы не будем вдаваться в технические подробности. В теории вероятностей обычно из сингулярной составляющей выделяют ещё *дискретную* часть, равную нулю вне некоторого дискретного множества.

Иногда теоремы о разложении Лебега 12.7 и теорему Радона—Никодима 12.1 объединяют в одну т.н. *теорему Лебега—Радона—Никодима* и говорят, что мера ν_a ещё и является неопределённым интегралом некоторой функции f по мере μ . По сути, мы это и получили, доказывая разложение Лебега. То есть можно сказать, что

$$d\nu = f d\mu + d\nu_s.$$

Ещё одно приятное следствие из разложения Жордана 12.5 заключается в следующем. Произвольному заряду Q можно сопоставить его *полную вариацию*

$$|Q| := Q^+ + Q^-.$$

Обратите внимание, что $|Q|(E)$ не то же самое, что $|Q(E)|$! То есть здесь аналогия с обозначением $|f|(x) = |f(x)|$ ломается, зато есть аналогия с

$$|f| = f^+ + f^-.$$

Упражнение 12.Е. Для любой интегрируемой функции f выполнено $|Q_f| = Q_{|f|}$.

Более того, отображение $E \mapsto |Q(E)|$ вообще не является мерой, если заряд имеет обе нетривиальные положительную и отрицательную части.

Упражнение 12.Ф. Имеет место эквивалентное определение полной вариации по формуле

$$|Q|(E) = \sup \sum_n |Q(E_n)|,$$

где супремум берётся по счётным разбиениям $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Величина

$$\|Q\| := |Q|(\Omega)$$

называется *вариацией заряда Q* .

Упражнение 12.Г. *Выполнено*

$$\frac{1}{2} \|Q\| \leq \sup |Q(A)| \leq \|Q\|,$$

где супремум берётся по всем измеримым множествам A .

Из полной вариации можно получить несколько эквивалентных определений абсолютной непрерывности (ср. лемма 10.3 и задача 10.11).

Упражнение 12.Н. Пусть Q и μ некоторые заряд и мера, соответственно. Следующие утверждения равносильны.

- (i) $Q \ll \mu$.
- (ii) $|Q| \ll \mu$.
- (iii) $Q(E) = 0$, коль скоро $\mu(E) = 0$.

Вариация позволяет определить на пространстве мер метрику

$$d(\mu, \nu) := \|\mu - \nu\|.$$

Мы с ней уже встречались, например, в теореме 3.8, когда считали расстояние между распределениями Пуассона.

Помимо этого, разложение Жордана 12.5 теперь позволяет интегрировать функции по зарядам. А именно, функция f интегрируема по заряду Q , если она интегрируема по мерам Q^+ и Q^- . В таком случае

$$\int f dQ := \int f dQ^+ - \int f dQ^-.$$

После этого можно обобщить и теорему Радона—Никодима 12.1, и разложение Лебега 12.7 на случай двух зарядов; но мы не будем вдаваться в технические подробности.

§13. ПРОИЗВЕДЕНИЕ МЕР. ТЕОРЕМА ФУБИНИ

- Подскажите, как найти площадь Ленина?
- Надо ширину Ленина умножить на его длину.

Старый анекдот

Зафиксируем два измеримых пространства (X, σ_X, μ) и (Y, σ_Y, ν) с σ -конечными мерами. Наша цель: построить меру на $X \times Y$. Понятное дело, можно на всех измеримых прямоугольниках $S \times T$, где $S \in \sigma_X$ и $T \in \sigma_Y$, определить меру $\mu \times \nu(S \times T) := \mu(S)\nu(T)$, но пространство $\sigma_X \times \sigma_Y$ измеримых прямоугольников, скорее всего, даже кольцо не образует, не то что σ -алгебру.

Замечание. Обратите внимание, что измеримый прямоугольник — это множество, стороны которого измеримы. То есть, например, если $\sigma_X = \sigma_Y = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то декартов квадрат канторова множества будет являться измеримым прямоугольником, хотя он явно не является прямоугольником в геометрическом смысле.

Утверждение 13.1. Система $\sigma_X \times \sigma_Y$ измеримых прямоугольников образует полуалгебру.

Доказательство. Единица является измеримым прямоугольником, и это пространство замкнуто относительно пересечения, так что нужно проверить только свойство про вычитание (см. рисунок 8). Рассмотрим два измеримых прямоугольника $S \times T$ и $S' \times T'$ и заметим, что

$$S \times T \setminus S' \times T' = (S \setminus S') \times T \sqcup (S \cap S') \times (T \setminus T').$$

□

Упражнение 13.А. Проверьте, что формулировка и доказательство утверждения 13.1 останутся верными, если σ_X, σ_Y являются алгебрами.

Упражнение 13.В. Проверьте, что утверждение 13.1 останется верным, даже если σ_X, σ_Y являются полуалгебрами. Как изменится доказательство?

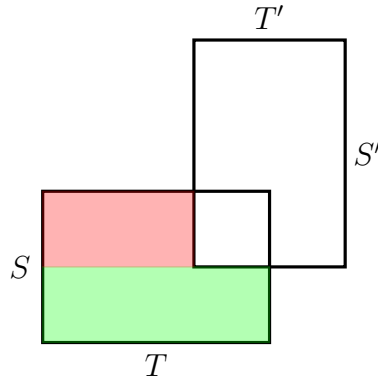


Рис. 8. Вычитание измеримого прямоугольника $S' \times T'$ из $S \times T$. Зелёный прямоугольник равен $(S \setminus S') \times T$. Красный прямоугольник равен $(S \cap S') \times (T \setminus T')$

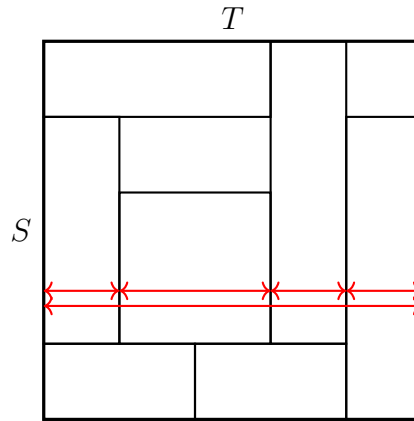


Рис. 9. Разбиение измеримого прямоугольника

Утверждение 13.2. *Отображение $\mu \times \nu$ является σ -конечной (σ -аддитивной) мерой на полуалгебре $\sigma_X \times \sigma_Y$. Кроме того, она конечна, если и только если обе меры μ и ν конечны.*

Доказательство. Замечание про конечность вытекает из того, что $\mu \times \nu(X \times Y) = \mu(X)\nu(Y)$, и если одна из мер бесконечна, то $X \times Y$ разбивается на счётное число измеримых прямоугольников конечной меры.

Докажем σ -аддитивность отображения $\mu \times \nu$. Рассмотрим измеримые прямоугольники $S \times T = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} S_n \times T_n$. Определим простые функции

$$f_n := \mathcal{I}(S_n)\nu(T_n) : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \mathcal{I}(S)\nu(T)$ (из рисунка 9 видно, как поточечно проверить равенство). Отсюда по следствию из теоремы Леви

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu \times \nu(S_n \times T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)\nu(T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S f_n d\mu = \int_S \nu(T) d\mu = \mu(S)\nu(T) = \mu \times \nu(S \times T).$$

□

Таким образом, можно продолжить меру $\mu \times \nu$ с полукольца $\sigma_X \times \sigma_Y$ до меры Лебега $\mu \otimes \nu$ на σ -алгебре измеримых множеств. Мера $\mu \otimes \nu$ называется **произведением мер**, или **продукт-мерой**.

Можно рассмотреть минимальную σ -алгебру $\sigma_X \otimes \sigma_Y$, порождённую всеми измеримыми прямоугольниками, сузив меру $\mu \otimes \nu$ на неё (в таком случае, конечно, может потеряться полнота меры). Далее до леммы 13.8 под «измеримостью» подразумевается измеримость именно относительно порождённой σ -алгебры $\sigma_X \otimes \sigma_Y$, а не меры.

Упражнение 13.С. Если $\sigma_X = \sigma_Y = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то $\sigma_X \otimes \sigma_Y = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, что есть σ -алгебра порождённая всеми открытыми множествами плоскости (или, что то же самое, порождённая всеми открытыми квадратами).

Введём одно очень удобное понятие. Для произвольного $A \subset X \times Y$ и любых $x \in X$, $y \in Y$ определим **сечения**

$$A_x := \{y \in Y : (x, y) \in A\} \quad \text{и} \quad A^y := \{x \in X : (x, y) \in A\}.$$

В дальнейшем мы почти не будем пользоваться вторым обозначением, но надо понимать, что все результаты симметрично формулируются для сечений обоих типов.

Упражнение 13.D. Покажите, что сечение предела является пределом сечений. Выполняется ли аналогичное свойство для проекций вместо сечений?

Аналогично, для функции $f: X \times Y \rightarrow A$ и произвольных $x \in X$ и $y \in Y$ её **сечениями** можно назвать функции $f_x: y \mapsto f(x, y)$ и $f^y: x \mapsto f(x, y)$.

Утверждение 13.3. Сечение измеримого множества измеримо, то есть $A_x \in \sigma_Y$ для любых $A \in \sigma_X \otimes \sigma_Y$ и $x \in X$. Кроме того, сечение измеримой функции измеримо, то есть для всякой $\sigma_X \otimes \sigma_Y$ -измеримой функции f и любого $x \in X$ сечение f_x является σ_Y -измеримым.

Доказательство. Воспользуемся снова принципом подходящих множеств и для произвольного $x \in X$ рассмотрим $\mathcal{F} := \{A \in \sigma_X \otimes \sigma_Y : A_x \in \sigma_Y\}$. Нетрудно убедиться, что $\mathcal{F}$ является σ -алгеброй над $\sigma_X \times \sigma_Y$, откуда следует первая часть утверждения.

Измеримость функции $f_x(y) = f(x, y)$ теперь следует из того, что прообразы $\{f_x < c\} = \{f < c\}_x$ лучей измеримы. $\square$

Далее нам понадобится ещё один технический результат. Класс множеств называется **монотонным**, если он замкнут относительно счётного объединения возрастающих множеств, и ещё замкнут относительно счётного пересечения убывающих множеств. Аналогично случаю с полукольцами и кольцами можно показать, что над любой системой существует наименьший монотонный класс, порождённый ею. Это понятие тоже так или иначе возникает, когда рассматривают произведения мер. Смысл здесь, пожалуй, в том, σ -алгебра красивый, но недостаточно технический объект, чтобы работать с произведениями мер.

Лемма 13.4 (О монотонных классах). Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра множеств. Тогда $\sigma(\mathcal{A})$ совпадает с наименьшим монотонным классом над $\mathcal{A}$.

Следовательно, любой монотонный класс над алгеброй включает в себя порождённую этой алгеброй σ -алгебру.

Доказательство. Рассмотрим наименьший монотонный класс $\mathcal{M}$ над алгеброй $\mathcal{A}$ с единицей Ω . Заметим, что $\sigma(\mathcal{A}) \supset \mathcal{M}$, так что нужно доказать только обратное включение. Для этого нужно показать, что $\mathcal{M}$ является σ -алгеброй. Будем много раз пользоваться принципом подходящих множеств.

Покажем, что $\mathcal{M}$ замкнут относительно дополнения. Рассмотрим

$$\mathcal{M}_0 := \{A \in \mathcal{M} : \Omega \setminus A \in \mathcal{M}\}.$$

В силу $\Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_n)$ и аналогичного равенства для $\bigcap$ получаем, что $\mathcal{M}_0$ является монотонным классом. Тогда из $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_0$ следует $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$, т.е. замкнутость относительно дополнения.

Теперь покажем замкнутость относительно пересечения. Для каждого $A \in \mathcal{M}$ рассмотрим

$$\mathcal{M}_A := \{B \in \mathcal{M} : A \cap B \in \mathcal{M}\}$$

класс множеств, «хорошо пересекающихся с A ». В силу $A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)$ и аналогичного равенства для $\bigcap$ получаем, что $\mathcal{M}_A$ является монотонным классом. Далее фокус: для любого $A \in \mathcal{A}$ имеем $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_A$, откуда получаем, что $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}$, то есть пересечение любого элемента из $\mathcal{A}$ с любым элементом из $\mathcal{M}$ лежит в $\mathcal{M}$. Но теперь, рассмотрев произвольное

$A' \in \mathcal{M}$, приходим к $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_{A'}$, откуда $\mathcal{M}_{A'} = \mathcal{M}$, что и означает замкнутость относительно пересечения.

Отсюда по закону де Моргана получаем замкнутость и относительно конечного объединения. Теперь можем выразить $A \triangle B = (A \cup B) \cap (\Omega \setminus (A \cap B))$. Таким образом, мы получили, что $\mathcal{M}$ — алгебра.

Замкнутость относительно счётных объединений теперь следует из того, что есть замкнутость относительно конечных объединений, которые и образуют возрастающую последовательность. $\square$

Утверждение 13.5 (Измеримость меры сечения). *Пусть мера ν конечна. Тогда для любого $A \in \sigma_X \otimes \sigma_Y$ функция $x \mapsto \nu(A_x)$ является σ_X -измеримой.*

Доказательство. Снова воспользуемся принципом подходящих множеств. Обозначим функции из условия через h_A . Обозначим через $\mathcal{H} \subset \sigma_X \otimes \sigma_Y$ систему множеств A , для которых h_A измеримы. Нетрудно заметить, что $\mathcal{H}$ содержит все измеримые прямоугольники. Более того, $\mathcal{H} \supset R(\sigma_X \times \sigma_Y)$; в самом деле, если $A = \bigsqcup_{n=1}^N A_n$, то $h_A = \sum_{n=1}^N h_{A_n}$. Кроме того, $\mathcal{H}$ является монотонным классом: если A_n возрастают к A сверху/снизу, то так же ведут себя сечения, и по непрерывности меры ν сверху и снизу, $h_{A_n} \rightarrow h_A$, откуда на h_A наследуется измеримость. Таким образом $\mathcal{H} \supset \sigma_X \otimes \sigma_Y$ по лемме о монотонных классах. $\square$

Следствие 13.6 (Измеримость интеграла сечения). *Пусть мера ν конечна. Тогда для всякой ограниченной $\sigma_X \otimes \sigma_Y$ -измеримой функции $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ определена и σ_X -измерима функция*

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) \nu(dy).$$

Доказательство. По теореме 8.5, любую ограниченную функцию можно равномерно приблизить простыми, причём в этом случае интегралы тоже будут сходиться равномерно. Тогда измеримость поточечного предела наследуется. Теперь остаётся доказать следствие для индикатора, что уже сделано в утверждении выше. $\square$

Теорема Фубини доказывается путём перехода к мере подграфика функции. Для этого нужно убедиться в измеримости подграфика, что мы делаем в следующем утверждении.

Утверждение 13.7. *Для произвольных измеримых функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ функция $(f, g): X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^2$ измерима. В частности, график, подграфик и надграфик измеримы, то есть*

$$\{(x, t) : t = f(x)\}, \{(x, t) : t \leq f(x)\}, \{(x, t) : t \geq f(x)\} \in \sigma_X \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Доказательство. Для каждого прямоугольника $I \times J \subset \mathbb{R}^2$ прообраз

$$\{(f, g) \in I \times J\} = \{f \in I\} \times \{g \in J\}$$

оказывается измеримым прямоугольником, откуда получается утверждение. Следствие про график получается из рассмотрения $(Y, \sigma_Y) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, функции $g = \text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, и прообразов прямой и полуплоскостей, соответственно. $\square$

Мы почти добрались до теоремы Фубини. Дальше есть два похожих по сути, но формально разных случая: работаем мы с полными мерами или нет. Если мы рассматриваем множества из $\sigma_X \otimes \sigma_Y$, нам безразлично, полны меры или нет. Если же мы рассматриваем $\mu \otimes \nu$ -измеримые множества, мы предполагаем дополнительно, что обе меры μ и ν полны; мы не будем оговаривать это специально.

Лемма 13.8 (Об интеграле меры сечения). *Пусть $A \subset X \times Y$ является $\mu \otimes \nu$ -измеримым. Тогда*

$$\mu \otimes \nu(A) = \int_X \nu(A_x) \mu(dx) = \int_Y \mu(A^y) \nu(dy),$$

где равенства осмысленны, то есть для μ -п.в. x множества A_x являются ν -измеримыми, функции $x \mapsto \nu(A_x)$ являются μ -измеримыми, и симметрично для другой меры.

Доказательство. Случай σ -конечных мер сводится к случаю конечных мер по теореме Леви, так что будем считать, что μ, ν конечны.

Рассмотрим на $\sigma_X \otimes \sigma_Y$ меры

$$\zeta_X(A) := \int_X \nu(A_x) \mu(dx) \quad \text{и} \quad \zeta_Y(A) := \int_Y \mu(A^y) \nu(dy).$$

Определение корректно в силу предыдущих доказанных утверждений: все отображения измеримы и ограничены на пространствах конечной меры, а потому интегрируемы. Эти меры совпадают с мерой $\mu \otimes \nu$ на полуалгебре $\sigma_X \times \sigma_Y$ измеримых прямоугольников, а потому, если доказать их σ -аддитивность, мы получим их совпадение и на $\sigma_X \otimes \sigma_Y$ (по теореме Каратеодори). Заметим, что для $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ выполнено и $A_x = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A_n)_x$, откуда $\nu(A_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu((A_n)_x)$. Тогда к этим рядам можно применить теорему Леви и получить σ -аддитивность меры ζ_X . Аналогично с ζ_Y .

Осталось заметить, что для множества A нулевой меры лемма тоже выполнена. В самом деле, из теоремы 6.12 о структуре измеримых множеств следует, что найдётся такое $A'' \in \sigma_X \otimes \sigma_Y$, что $A'' \supset A$ и $\mu \otimes \nu(A'') = 0$. Тогда по теореме 10.17 получаем, что $\nu((A'')_x) = 0$ для μ -п.в. x . Отсюда множества A_x являются ν -измеримыми для μ -п.в. x в силу полноты меры ν .

Окончательно, для произвольного измеримого A теорему получаем из разложения $A = A' \sqcup B$, где $A' \in \sigma_X \otimes \sigma_Y$ и $\mu \otimes \nu(B) = 0$. $\square$

Следствие 13.9 (О мере подграфика). *Для неотрицательной интегрируемой функции f на σ -конечном пространстве X интеграл от неё равен мере подграфика, то есть*

$$\int_X f d\mu = \mu \otimes \lambda\{(x, t) : 0 \leq t \leq f(x)\}.$$

Доказательство. Мы уже выясняли, что подграфик $\Gamma = \{(x, t) : 0 \leq t \leq f(x)\}$ измерим. Остаётся заметить, что $f(x) = \lambda(\Gamma_x)$, и применить предыдущую лемму. $\square$

В качестве лирического отступления, докажем следующее усиление этого следствия про меру подграфика. Условие неотрицательности в нём введено для удобства.

Теорема 13.10 (Формула интегрирования по Лебегу по частям). *Пусть f — измеримая неотрицательная функция на σ -конечном пространстве X . Она интегрируема по мере μ тогда и только тогда, когда функция $t \mapsto \mu\{f > t\}$ интегрируема по классической мере Лебега λ , причём*

$$\int_X f d\mu = \int_0^{\infty} \mu\{f \geq t\} \lambda(dt) = \int_0^{\infty} \mu\{f > t\} \lambda(dt).$$

Доказательство. Докажем необходимость. Рассмотрим подграфик $\Gamma := \{(x, t) : 0 \leq t \leq f(x)\}$. Тогда по следствию 13.9 и затем лемме 13.8,

$$\int_X f d\mu = \mu \otimes \lambda(\Gamma) = \int_{t=0}^{\infty} \mu(\Gamma_t) \lambda(dt),$$

что и есть первое равенство. Второе равенство следует из того, что $\mu\{f > t\} = \mu\{f \geq t\}$ для λ -п.в. t ; более того, множество таких t , что $\mu\{f = t\} > 0$, не более чем счётно в силу σ -конечности множества $\{f \neq 0\}$ (см. задачу 6.17).

Докажем достаточность. Раз интеграл в правой части конечен, то меры $\mu\{f > t\}$ конечны при всех $t > 0$ (иначе бы они были бесконечны на отрезке). Тогда функции $f_n := f \mathcal{I}_{\{\frac{1}{n} \leq f \leq n\}}$ интегрируемы, и для них

$$\int_X f_n d\mu = \int_0^{\infty} \mu\{f_n > t\} \lambda(dt) \leq \int_0^{\infty} \mu\{f > t\} \lambda(dt) < +\infty.$$

Отсюда получаем интегрируемость функции f по теореме Леви. $\square$

Смысл этой теоремы в том, что интеграл Лебега в чём-то похож на интеграл Римана: можно нарезать не ось значений на маленькие кусочки, а ось аргументов, как и делается в интеграле Римана.

Мы вплотную подошли к теореме Фубини. Здесь следует отметить, что мы можем рассматривать произведение и большего количества мер.

Лемма 13.11. (i) Произведение σ -алгебр ассоциативно. Более того, оно совпадает с σ -алгеброй, порождённой измеримыми кубами.

(ii) Произведение мер ассоциативно. В частности, класс измеримых множеств не зависит от порядка перемножения мер.

Доказательство. Для доказательства пункта (i) достаточно доказать часть «более того». Эта часть следует в силу

$$\sigma_X \times \sigma_Y \times \sigma_Z \subset (\sigma_X \otimes \sigma_Y) \times \sigma_Z \subset \sigma(\sigma_X \times \sigma_Y \times \sigma_Z).$$

Пункт (ii) по сути следует из теоремы 6.14 о единственности меры Лебега. Но можно доказать его и напрямую. Рассмотрим три (σ -конечные σ -аддитивные) меры μ, ν, ζ на $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$. Из совпадения

$$(\mu \times \nu) \times \zeta = \mu \times (\nu \times \zeta)$$

на $\sigma_X \times \sigma_Y \times \sigma_Z$ по теореме Каратеодори 6.10 следует и ассоциативность произведения мер на $\sigma_X \otimes \sigma_Y \otimes \sigma_Z$ (в качестве лёгкого упражнения предлагается проверить, что $\sigma_X \times \sigma_Y \times \sigma_Z$ является полуалгеброй; см. задачу 13.11).

Далее по теореме 6.12 о структуре измеримых множеств получаем, что классы измеримых множеств совпадают. В самом деле, рассмотрим $(\mu \otimes \nu) \otimes \zeta$ измеримое множество A . Тогда оно представимо в виде $A = A' \sqcup B$, где $A' \in \sigma_X \otimes \sigma_Y \otimes \sigma_Z$, а $(\mu \otimes \nu) \otimes \zeta(B) = 0$. Снова по теореме 6.12 погружаем $B \subset N$ в некоторое надмножество $N \in \sigma_X \otimes \sigma_Y \otimes \sigma_Z$ нулевой меры. В силу полноты мер, получаем, что B измеримо и относительно $\mu \otimes (\nu \otimes \zeta)$.

Наконец, на измеримых множествах меры совпадают в силу того, что

$$(\mu \otimes \nu) \otimes \zeta(A) = \mu \otimes \nu \otimes \zeta(A') = \mu \otimes (\nu \otimes \zeta)(A).$$

□

Теорема 13.12 (Фубини). Пусть f интегрируема относительно $\mu \otimes \nu$. Тогда интеграл по произведению мер равен обоим повторным интегралам, то есть

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X d\mu \int_Y f d\nu = \int_Y d\nu \int_X f d\mu,$$

где для μ -п.в. x сечения $y \mapsto f(x, y)$ интегрируемы относительно ν , для ν -п.в. y сечения $x \mapsto f(x, y)$ интегрируемы относительно μ , и функции $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ и $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ интегрируемы (по соответствующим мерам).

Доказательство. Достаточно доказать теорему для неотрицательных функций. Рассмотрим подграфик

$$\Gamma := \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Применяя следствие 13.9, лемму 13.8 и ещё раз следствие 13.9, получаем

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \mu \otimes \nu \otimes \lambda(\Gamma) = \int_X \nu \otimes \lambda(\Gamma_x) \mu(dx) = \int_X \mu(dx) \int_Y f(x, y) \nu(dy),$$

причём все нужные функции интегрируемы. Равенство второму повторному интегралу получается аналогично.

Если бы мы использовали ассоциативность произведения мер только на наименьшей σ -алгебре, то дальше бы доказательство выглядело так. Предыдущий случай был бы доказан только для $\sigma_X \otimes \sigma_Y$ -измеримой функции. Для $\mu \otimes \nu$ -измеримой функции теорема бы следовала из предыдущего случая, теоремы 8.6 (о том, что любая $\mu \otimes \nu$ -измеримая функция п.в. равна некоторой $\sigma_X \otimes \sigma_Y$ -измеримой), и из того, что если $f = 0$ п.в., то $\int_X f(x, y) \mu(dx) = 0$ для ν -п.в. y и $\int_Y f(x, y) \nu(dy) = 0$ для μ -п.в. x . Докажем последнее. Рассмотрим множество $N \in \sigma_X \otimes \sigma_Y$ нулевой меры, вне которого $f = 0$. По

лемме 13.8 и теореме 10.17 получаем, что $\nu(N_x) = 0$ для μ -п.в. x . Следовательно, функции $y \mapsto f(x, y)$ равны нулю для μ -п.в. x . Отсюда $\int_Y f(x, y) \nu(dy) = 0$ для μ -п.в. x . Для второго интеграла результат получается аналогично. $\square$

У теоремы Фубини много замечательных применений, но есть один существенный недостаток — она совершенно бесполезна. Может быть так, что оба повторных интеграла существуют и даже равны, но нет интеграла по продакт-мере. Может быть и так, что один из повторных интегралов существует, а другой нет. Наконец, бывают даже проблемы с измеримостью. Следующий результат помогает избежать головной боли.

Теорема 13.13 (Тонелли). Пусть f — неотрицательная $\mu \otimes \nu$ -измеримая функция. Тогда она интегрируема по $\mu \otimes \nu$, если

$$\int_X d\mu \int_Y f d\nu < +\infty.$$

Доказательство. По теореме Леви, достаточно доказать теорему для конечных мер. Рассмотрим срезки $f_n := \min(f, n)$; они измеримы и ограничены, а потому интегрируемы по мере $\mu \otimes \nu$. Тогда по теореме Фубини, применённой к срезкам,

$$\int_{X \times Y} f_n d(\mu \otimes \nu) = \int_X d\mu \int_Y f_n d\nu \leq \int_X d\mu \int_Y f d\nu < +\infty.$$

Поскольку срезки f_n возрастают снизу к f , то по теореме Леви

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} f_n d(\mu \otimes \nu) < +\infty,$$

откуда f интегрируема. $\square$

Покажем пример применения теоремы Фубини—Тонелли в случае, когда, казалось бы, никаких повторных интегралов нет (на Википедии этот же пример через теорему Фубини решается, на взгляд автора, более сложным способом). Пусть мы хотим найти

$$\int e^{-x^2} d\lambda(x).$$

Понятно, что функция интегрируема, ибо имеет интегрируемую мажоранту $e^{-|x|}$. Заметим, что можно было бы написать

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\lambda(x) \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda(x) d\lambda(y),$$

если бы правый интеграл по мере $\lambda \otimes \lambda$ существовал. Но он существует по теореме Тонелли! А тогда можно перейти к несобственному интегралу Римана (или по теореме Леви интегрировать по возрастающим кругам), что приводит к

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty e^{-r^2} r dr \int_0^\pi d\varphi = \pi \int_0^\infty e^{-z} dz = \pi.$$

Отсюда

$$\int e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

а тогда функция

$$F(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

порождает меру Лебега—Стилтьеса μ_F , которая называется *гауссовской мерой*, или *распределением нормальной случайной величины*. Функцию $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ называют *плотностью нормального распределения*.

§14. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Стоит отметить, что мы теперь можем не только интегрировать по заряду, но интегрировать ещё и комплекснозначные функции. В самом деле, мы определяли интеграл через пределы (сходимость по мере, фундаментальность в среднем). Совершенно не важно, измеряется расстояние на прямой $\mathbb{R}$ или на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Докажем сперва несколько простых утверждений про интегрируемость комплекснозначных функций.

Утверждение 14.1. Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, и Q — заряд на Ω . Тогда f интегрируема по Q вместе со своими действительной и мнимой частями, или, что равносильно, со своим абсолютным значением.

Доказательство. Следует из того, что для любого $z \in \mathbb{C}$ выполнено

$$|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 2|z|.$$

□

Отсюда следует, что для интегрируемой комплекснозначной функции f формулу

$$\int f = \int \operatorname{Re} f + i \int \operatorname{Im} f$$

можно было бы принять в качестве определения интеграла. Это довольно распространённый подход.

Утверждение 14.2. Для любой интегрируемой по мере μ функции f выполнено

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Доказательство. Если $I := \int f d\mu = 0$, утверждение доказано. Иначе

$$|I| = \frac{II^*}{|I|} = \int \frac{I^*}{|I|} f d\mu = \operatorname{Re} \int \frac{I^*}{|I|} f d\mu = \int \operatorname{Re} \frac{I^*}{|I|} f d\mu \leq \int \left| \frac{I^*}{|I|} f \right| d\mu = \int |f| d\mu,$$

где звёздочкой обозначено комплексное сопряжение. □

Если бы мы здесь просто разбили функцию на действительную и мнимую части, то справа вылезла бы лишняя константа вроде 2 или $\sqrt{2}$. Мы поигрались с линейностью интеграла, чтобы ликвидировать эту константу.

Итак, пусть Q — некоторый заряд на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Его *характеристическая функция* $\hat{Q}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ определяется как

$$\hat{Q}(t) := \int e^{itx} dQ(x) = \int \cos(tx) dQ(x) + i \int \sin(tx) dQ(x).$$

Утверждение 14.3 (Элементарные свойства).

- (i) Характеристическая функция корректно определена при всех $t \in \mathbb{R}$.
- (ii) Выполнено $\hat{Q}(0) = Q(\mathbb{R})$.
- (iii) Характеристическая функция $\hat{Q}$ равномерно ограничена вариацией $\|Q\|$.
- (iv) Характеристическая функция $\hat{Q}$ равномерно непрерывна.
- (v) Выполняется $\hat{Q}(-t) = \hat{Q}(t)^*$ (где звёздочка означает комплексное сопряжение).
- (vi) Характеристическая функция $\hat{Q}$ действительна тогда и только тогда, когда Q симметричен относительно нуля.

Доказательство. Корректность определения следует из того, что меры Q^+, Q^- конечны, а функции $x \mapsto e^{itx}$ ограничены при всех t . Второе свойство следует из

$$\hat{Q}(0) = \int dQ = Q(\mathbb{R}).$$

Равномерная ограниченность следует из

$$\left| \widehat{Q}(t) \right| \leq \left| \int e^{itx} dQ^+(x) \right| + \left| \int e^{itx} dQ^-(x) \right| \leq Q^+(\mathbb{R}) + Q^-(\mathbb{R}) = \|Q\|.$$

Равномерная непрерывность следует из того, что

$$\left| \widehat{Q}(t+h) - \widehat{Q}(t) \right| = \left| \int e^{itx} (e^{ihx} - 1) dQ(x) \right| \leq \int |e^{ihx} - 1| d|Q|(x),$$

откуда по теореме Лебега 11.3 получаем равномерную сходимость к 0 при $h \rightarrow 0$ равномерно по t .

Следующее свойство очевидно. Покажем последнее свойство. Если Q симметричен относительно нуля, то

$$\int \sin(tx) dQ(x) = 0.$$

Обратно, пусть $\widehat{Q}$ принимает только действительные значения. Тогда

$$\widehat{Q}(t) = \widehat{Q}(-t)^* = \widehat{Q}(-t) = \widehat{Q}_s(t),$$

где $Q_s(B) := Q(-B)$, и результат $Q = Q_s$ вытекает из следующей теоремы единственности 14.4. $\square$

Теорема 14.4 (Единственность). Пусть Q_1, Q_2 — два заряда на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Тогда $Q_1 = Q_2$ равносильно тому, что $\widehat{Q}_1 = \widehat{Q}_2$.

Иными словами, имеется биекция между зарядами и их характеристическими функциями.

Смысл теоремы в том, что значения зарядов можно «заархивировать» в виде интегралов; ср. интегральное свойство 10.18.

Нам понадобится следующая теорема из курса математического анализа.

Теорема 14.5 (Вейерштрасс—Стоун; б/д). Для любой 2π -периодической непрерывной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и любого $\gamma > 0$ найдётся такая функция $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$P(x) = \sum_{k=-K}^K c_k e^{ikx}, \quad \text{где } K \in \mathbb{N} \text{ и } c_k \in \mathbb{C},$$

$$\text{что } |f(x) - P(x)| < \gamma \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}.$$

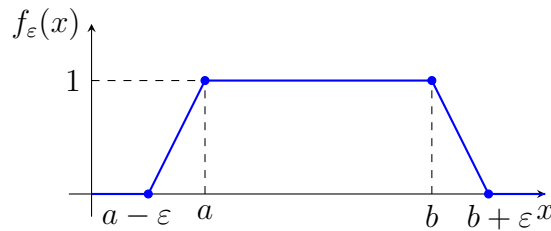


Рис. 10. Функция-«шапочка» f_ε

Доказательство теоремы единственности 14.4. Из равенства зарядов равенство их характеристических функций очевидно. Докажем в другую сторону. Достаточно доказать, что для заряда Q из $\widehat{Q} = 0$ следует $Q = 0$.

Итак, зафиксируем заряд Q с условием $\widehat{Q} = 0$. Глобально, наша цель для начала — показать, что заряды всех отрезков нулевые. Зафиксируем произвольные $a < b$ на $\mathbb{R}$. Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим (рис. 10) «шапочку» $f_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которая равна 0 вне отрезка $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$, равна 1 на отрезке $[a, b]$, и линейно возрастает/убывает на разности этих отрезков. Покажем, что

$$\int f_\varepsilon dQ = 0.$$

Рассмотрим достаточно большое $n \in \mathbb{N}$, чтобы $[a - \varepsilon, b + \varepsilon] \subset [-n, n]$. По теореме Вейерштрасса—Стоуна 14.5, существует такое $K \in \mathbb{N}$ и такие $c_k \in \mathbb{C}$, что для

$$f_\varepsilon^n(x) := \sum_{k=-K}^K c_k e^{ikx\pi/n}$$

выполнено

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon^n(x)| < \frac{1}{n} \quad \text{для всех } x \in [-n, n],$$

и функция $f_\varepsilon^n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ периодическая с периодом $2n$. По условию, для всех $t \in \mathbb{R}$

$$\int e^{itx} dQ(x) = 0.$$

Следовательно,

$$\int f_\varepsilon^n dQ = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int f_\varepsilon dQ \right| &\leq \left| \int f_\varepsilon dQ - \int f_\varepsilon^n dQ \right| + \left| \int f_\varepsilon^n dQ \right| \leq \int |f_\varepsilon - f_\varepsilon^n| d|Q| \leq \\ &\leq \frac{1}{n} |Q|[-n, n] + \left(1 + \frac{1}{n}\right) |Q|(\mathbb{R} \setminus [-n, n]) = \frac{1}{n} \|Q\| + |Q|(\mathbb{R} \setminus [-n, n]). \end{aligned}$$

С ростом $n \rightarrow \infty$ оба слагаемых стремятся к 0, откуда получаем требуемое.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $f_\varepsilon \rightarrow \mathcal{I}[a, b]$, причём все функции мажорируются константой 1. Тогда по теореме Лебега 11.3 о мажорируемой сходимости,

$$0 = \int f_\varepsilon dQ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \mathcal{I}[a, b] dQ = Q[a, b],$$

то есть $Q[a, b] = 0$.

Итак, мы доказали, что заряды всех отрезков равны 0. Если бы заряд являлся мерой, то по теореме Каратеодори 6.7 всё было бы доказано. В общем же случае для завершения доказательства воспользуемся принципом подходящих множеств: рассмотрим

$$\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : Q(B) = 0\}.$$

Заметим, что $\mathcal{A}$ содержит все отрезки; тогда он содержит и все промежутки (в том числе бесконечные) в силу непрерывности заряда; а тогда он содержит и алгебру промежутков в силу аддитивности заряда. Кроме того, класс $\mathcal{A}$ является монотонным классом в силу непрерывности заряда. Следовательно, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ по лемме 13.4 о монотонных классах. $\square$

Замечание. Последний переход в доказательстве похож на теорему Каратеодори: заряд определён на некотором порождающем классе, а тогда определён и на порождённой σ -алгебре. Как видно из задачи 10.10, это всё-таки **не** аналог теоремы Каратеодори для зарядов.

Вот два главных примера характеристических функций. В математическом анализе преобразование $f \mapsto Q_f = f \cdot \mu \mapsto \widehat{Q}_f$ вы будете называть (*обратным*) *преобразованием Фурье*. В теории вероятностей преобразование $\xi \mapsto P \circ \xi^{-1} = P_\xi \mapsto \widehat{P}_\xi$ вы будете называть *характеристической функцией случайной величины* ξ . Теорема единственности 14.4 утверждает, что случайные величины имеют одинаковое распределение в точности тогда, когда их характеристические функции совпадают. Например, если случайная величина имеет характеристическую функцию $\varphi(t) = pe^{it} + (1 - p)$, то эта величина однозначно имеет распределение $\text{Bern}(p)$.

Говоря о характеристических функциях, нельзя не обсудить такое понятие. Для двух борелевских зарядов Q_1, Q_2 их **свёрткой** называется борелевский заряд $Q_1 * Q_2$, определённый как

$$Q_1 * Q_2(B) := \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \mathcal{I}_B(x + y) dQ_1(x) dQ_2(y) = \int_{\mathbb{R}} Q_1(B - x) dQ_2(x) = \int_{\mathbb{R}} Q_2(B - x) dQ_1(x),$$

где последние два равенства следуют из теоремы Фубини (формально, применённой к мерам $Q_i^\pm$). Иными словами, $Q_1 * Q_2$ является образом заряда $Q_1 \otimes Q_2$ при отображении $(x, y) \mapsto x + y$.

Покажем чуть подробнее, как мы построили заряд $Q_1 \otimes Q_2$ и к чему применили теорему Фубини. Хотелось уметь продолжать заряд $Q_1 \times Q_2$. К сожалению, аналог теоремы Каратеодори для зарядов может не выполняться. Но можно обойтись без этого: заметим, что

$$Q_1 \times Q_2 = (Q_1^+ \times Q_2^+ + Q_1^- \times Q_2^-) - (Q_1^+ \times Q_2^- + Q_1^- \times Q_2^+),$$

где слагаемые в скобках являются конечными σ -аддитивными мерами. Продолжим их по теореме Каратеодори 6.7, и назовём полученные продолжения положительной и отрицательной частями заряда $Q_1 \otimes Q_2$.

Связь с образом меры при отображении проистекает из следующего результата.

Теорема 14.6 (Замена переменных в интеграле Лебега). *Пусть имеются два измеримых пространства (X, σ_X, μ) и (Y, σ_Y) . Пусть также имеются две измеримые функции $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда g интегрируема по мере $\mu \circ f^{-1}$ в точности тогда, когда функция $g \circ f$ интегрируема по мере μ , причём*

$$\int_Y g(y) \mu \circ f^{-1}(dy) = \int_X g(f(x)) \mu(dx).$$

Доказательство. Для индикатора $g = \mathcal{I}_A$ это определение образа меры:

$$\int_Y \mathcal{I}_A(y) \mu \circ f^{-1}(dy) = \mu \circ f^{-1}(A) = \mu\{f \in A\} = \int_X \mathcal{I}\{f(x) \in A\} \mu(dx).$$

Далее по линейности результат получаем для простых функций. Отсюда по теореме Леви получаем результат для $g \geq 0$ как для предела снизу простых функций. $\square$

Стоит отметить, что меру можно заменить на заряд, в силу его разложения на положительную и отрицательную части.

Упражнение 14.А. Для независимых случайных величин ξ, η выполнено

$$P_{\xi+\eta} = P_\xi * P_\eta.$$

Упражнение 14.В. Свёртка ассоциативна и коммутативна.

Теорема 14.7. Имеет место

$$\widehat{Q_1 * Q_2} = \widehat{Q_1} \widehat{Q_2}.$$

Доказательство. Следует из теоремы Фубини в силу

$$\widehat{Q_1 * Q_2}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} Q_1 * Q_2(du) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{it(x+y)} Q_1 \otimes Q_2(dx, dy) = \widehat{Q_1}(t) \widehat{Q_2}(t).$$

$\square$

Таким образом, можно провести такую аналогию с числами: как логарифм позволяет перейти от произведения к сложению, так и преобразование Фурье позволяет перейти от свёртки к произведению.

Наконец, можно вывести следующую теорему Поля Левй.

Теорема 14.8 (Формула обращения). Для заряда Q на прямой и любых точек $a < b$ выполнено

$$\frac{Q(a, b] + Q[a, b)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \widehat{Q}(t) dt.$$

В частности, если заряд точек a, b нулевой, выражение слева равно $Q(a, b)$.

Дженджер С. В.

Доказательство. Рассмотрим борелевскую меру μ , определяемую как

$$\mu(B) := \lambda(B \cap [-b, -a]).$$

Она абсолютно непрерывна относительно классической меры Лебега, и

$$p := \frac{d\mu}{d\lambda} = \mathcal{I}[-b, -a].$$

В таком случае

$$\widehat{\mu}(t) = \int e^{itx} p(x) dx = \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}.$$

Таким образом, подынтегральное выражение равно

$$\widehat{\mu}\widehat{Q} = \widehat{\mu * Q}.$$

Более того, отсюда видно, что подынтегральное выражение ограничено константами $\|\mu\| \cdot \|Q\|$ и $\|\mu * Q\|$, и потому интегрируемо.

Заметим, что $\mu * Q \ll \lambda$: в самом деле,

$$\begin{aligned} \mu * Q(B) &= \int \mu(B - x) Q(dx) = \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{y \in B-x} p(y) Q(dx) dy = \\ &= \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{u \in B} p(u - x) Q(dx) du = \int_{u \in B} \int_{x \in \mathbb{R}} p(u - x) Q(dx) du, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d\mu * Q}{d\lambda}(u) = \int_{x \in \mathbb{R}} p(u - x) Q(dx) = \int_{[u+a, u+b]} dQ = Q[u + a, u + b].$$

Далее положим $\nu := \mu * Q$ (то есть, вообще говоря, это заряд). Нас почти до конца доказательства будет интересовать только тот факт, что $\nu \ll \lambda$. Итак, по теореме Фубини имеем

$$\int_{-T}^T \widehat{\nu}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^T e^{itx} dt \nu(dx).$$

Заметим, что мы в общем-то уже считали подынтегральное выражение:

$$\int_{-T}^T e^{itx} dt = \frac{e^{iT x} - e^{-iT x}}{ix} = \frac{2 \sin T x}{x}.$$

Поделив ещё на 2π , приходим к

$$K_T(x) := \frac{\sin T x}{\pi x}.$$

То есть нас интересует

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int K_T(x) \nu(dx);$$

выражение под пределом можно было бы назвать свёрткой $K_T * \nu(0)$. Вспомним, что $\nu \ll \lambda$, и положим

$$f := \frac{d\nu}{d\lambda}.$$

Теперь имеем

$$\int K_T(x) \nu(dx) = \int K_T(x) f(x) dx.$$

Без доказательства воспользуемся тем фактом, что предел данного интеграла при $T \rightarrow \infty$ равен $\frac{f(+0) + f(-0)}{2}$ (здесь ещё нужно проверить некоторые свойства функции f). Остаётся вспомнить, что

$$f(x) = Q[x + a, x + b],$$

откуда по непрерывности заряда

$$f(+0) = Q(a, b] \quad \text{и} \quad f(-0) = Q[a, b).$$

□

С небольшими дополнительными ухищрениями отсюда можно было бы получить и теорему единственности 14.4, но мы её уже доказали.

Напоследок, докажем один технически более приятный факт.

Теорема 14.9 (Формула обращения; абсолютно непрерывный случай). Пусть для заряда Q оказалось, что

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{Q}(t)| dt < +\infty.$$

Тогда $Q \ll \lambda$, и

$$\frac{dQ}{d\lambda}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \widehat{Q}(t) dt.$$

Доказательство. Воспользуемся обозначениями из доказательства предыдущей теоремы. Мы видели, что для любых чисел $a < b$

$$\widehat{\mu}(t) = \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it},$$

откуда

$$\left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \right| \leq \|\mu\| = b - a.$$

Отсюда

$$\left| \frac{Q(a, b] + Q[a, b)}{2} \right| \leq \frac{b - a}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{Q}(t)| dt.$$

Следовательно, Q не имеет точек ненулевого заряда, и выполнено

$$Q(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \widehat{Q}(t) dt.$$

Тогда при $h \rightarrow +0$

$$\frac{Q(x, x+h)}{h} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx} - e^{-it(x+h)}}{ith} \widehat{Q}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \widehat{Q}(t) dt.$$

Подынтегральное выражение равномерно ограничено интегрируемой функцией $|\widehat{Q}(t)|$ и сходится к $e^{-itx} \widehat{Q}(t)$ при $h \rightarrow +0$. Тогда по теореме Лебега 11.3 о мажорируемой сходимости,

$$g(x) := \lim_{h \rightarrow +0} \frac{Q(x, x+h)}{h} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \widehat{Q}(t) dt.$$

Остаётся заметить, что g непрерывна (по соображениям непрерывности самой характеристической функции), а тогда по формуле Ньютона—Лейбница 12.6 получаем, что $Q \ll \lambda$ и $g = \frac{dQ}{d\lambda}$. $\square$

Все эти тождества напрямую связаны с теорией обобщённых функций. Там полагают

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{itx} dx := \delta(t),$$

что неформально записывают как

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } t = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Но это не измеримая функция, равная бесконечности на множестве нулевой меры. Это *обобщённая функция*, удовлетворяющая такому свойству, что

$$\int f(t) \delta(t) dt = f(0).$$

Или, в более общем виде,

$$\int f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0).$$

Из этих формул видно, что

$$\int \delta(t) dt = 1.$$

Таким образом, δ можно было бы назвать *обобщённой плотностью* дельта-меры Дирака δ_0 , определяемой по правилу

$$\delta_0(A) := \mathcal{I}\{0 \in A\}.$$

Если условно положить $\delta := \frac{d\delta_0}{d\lambda}$, то и в самом деле получаем

$$\int f(t)\delta(t) dt = \int f(t) d\delta_0(t) = f(0).$$

По сути из этих соображений и был получен последний переход в доказательстве формулы обращения: $K_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \delta$, откуда, разбивая интеграл на положительную и отрицательную части, и получаем нужный последний переход.

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРАМ

Страдание даёт прозрение,
в прозрении — благодать

М. Щербakov

Тема 1: Вероятность и случайные величины

- 1.1.** В коробке лежат пять синих и три белых шара. Вася вытягивает шары до тех пор, пока не вытянет все синие. Какова вероятность того, что после вытягивания всех синих шаров в коробке останется а) хотя бы один белый шар? б) ровно один белый шар?
- 1.2.** В партии из N изделий имеется $M \leq N$ бракованных. Выбирается $n \leq N$ изделий из этой партии. Найдите вероятность того, что среди выбранных окажется ровно m бракованных, для схем выбора с возвращением и без.
- 1.3.** В предыдущей задаче обозначим через A_k событие, что на k -ом шаге вытянули брак, а через B_m событие, что всего вытянули m бракованных изделий. Найдите $P(A_k | B_m)$ для схем выбора с возвращением и без.
- 1.4.** В урне лежат 3 белых и 2 чёрных шара. Из неё переложили два вытянутых наугад шара в урну, в которой уже лежало 4 белых и 4 чёрных шара. Найдите вероятность вытянуть из второй урны чёрный шар.
- 1.5.** В урне лежат 20 белых и 10 чёрных шаров. Из неё наугад в пустую урну переложили 10 шаров, а потом из этой урны тоже наугад вытянули один шар. Найдите вероятность того, что он окажется белым.
- 1.6.** В первой урне 10 белых и 20 чёрных шаров, во второй — 10 белых и 10 чёрных шаров. Из первой урны наугад извлекают 4 шара, из второй 6 шаров, и перекладывают эти шары в третью пустую урну. Какова вероятность того, что шар, извлечённый из третьей урны, окажется белым?
- 1.7.** В корзине лежат три белых и два чёрных шара. Из неё без возвращения вытянули три шара. Найдите вероятность того, что это оказались чёрный, белый, чёрный шары (именно в таком порядке).
- 1.8.** В связке n ключей, из которых только один подходит к замку. Найдите вероятность открыть дверь ровно с k -й попытки, если после каждой неудачной попытки ключ возвращается / не возвращается в связку.
- 1.9.** Мастер Подземелий бросает кубик $1d4$ до тех пор, пока сумма выпавших при всех бросках очков не станет 3 или больше. Достоверно известно, что общая сумма очков оказалась равна ровно 3. Какова вероятность того, что было сделано ровно два броска?
- 1.10.** Игральный кубик подбрасывают до тех пор, пока не выпадет шестёрка. Найдите вероятность того, что единичка выпадет ровно три раза.
- 1.11.** Староста группы Б05-ххх заметил, что семинарист приходит на занятия со случайным опозданием в пределах 15 минут, при этом он разрешает проходить в аудиторию только тем студентам, которые пришли после него не позднее 5 минут. Староста же решил опоздать на семинар, но выбрал себе границу случайного опоздания всего в 10 минут, и время ожидания семинариста тоже 10 минут. Какова вероятность того, что он всё же посетит семинар?
- 1.12 (Парадокс Бертрانا).** Какова вероятность того, что случайная хорда окружности больше стороны равностороннего треугольника, вписанного в эту окружность? Решите задачу для трёх различных способов задания случайной хорды: • случайно выбираются концы хорды на окружности; • случайно выбирается радиус окружности, после чего случайно выбирается середина хорды на нём; • случайно выбирается точка в круге, ограниченном окружностью, после чего проводится хорда с центром в этой точке.

1.13. Два стрелка стреляют по мишени. Первый попадает с вероятностью 0.5, второй с вероятностью 0.8. При этом они изначально бросают симметричную монетку, чтобы определить, кто будет стрелять. Найдите вероятность того, что стрелял первый, если известно, что мишень была поражена.

1.14. Вероятность заразиться некоторым вирусом равна 0.001. Имеется тест на вирус, который даёт ложный результат с вероятностью 0.01. Пусть тест показал положительный результат (то есть что вирус есть в организме). Найдите вероятность того, что вирус действительно в организме.

1.15 (Парадокс Бернштейна). Подбрасывают две одинаковые монеты. Проверьте на независимость (попарную и в совокупности) три события: когда первая монета выпала орлом, когда вторая монета выпала орлом, и когда ровно одна монета выпала орлом. Рассмотрите случай симметричных и несимметричных монет.

1.16. Для двух независимых случайных величин $\xi \sim \text{Bin}(n, p)$ и $\eta \sim \text{Bin}(m, p)$ найдите распределение величины $\xi + \eta$.

1.17. Для двух независимых случайных величин $\xi \sim \text{Pois}(\lambda)$ и $\eta \sim \text{Pois}(\theta)$ найдите распределение величины $\xi + \eta$.

1.18. Для $\xi \sim \text{Geom}(p)$ найдите $P(\xi \geq n)$ для всех $n \geq 0$.

1.19. Для независимых случайных величин $X_1, \dots, X_n \sim \text{Geom}(p)$ найдите распределение величины $\min\{X_1, \dots, X_n\}$.

1.20. Для независимых случайных величин $X_1, \dots, X_n \sim \text{Geom}(p)$ найдите распределение величины $X_1 + \dots + X_n$.

1.21. Для двух независимых случайных величин $\xi \sim \text{Geom}(p)$ и $\eta \sim \text{Geom}(q)$ с разными параметрами $p \neq q$ найдите распределение величины $\xi + \eta$.

1.22. Докажите существование двух независимых пуассоновских случайных величин.

1.23. Некоторое насекомое откладывает $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ яиц. Из них вылупляется Y потомков, причём вероятность развития насекомого из яйца равна p , и развитие насекомого из яйца не зависит ни от количества яиц, ни от развития других яиц. Найдите распределение величины Y .

1.24. Любитель бабочек Владимир поймал $X \sim \text{Bin}(n, p)$ бабочек. Из них оказалось Y красивых бабочек, каждая красивая независимо от их количества и от остальных с вероятностью q . Найдите распределение величины Y .

1.25. Ося и Киса решают задачи независимо друг от друга: Ося по ОВиТМу, а Киса по матанализу. Известно, что количество решённых Осей задач имеет распределение $\text{Pois}(\lambda)$, а количество решённых Кисой задач имеет распределение $\text{Pois}(\theta)$. Найдите вероятность того, что Ося решил k задач, если вместе они решили n задач.

Дополнительные задачи

1.26. Двое бросают честную монетку, один подбросил её 10 раз, а другой — 11 раз. Найдите вероятность того, что у второго выпало больше орлов, чем у первого.

1.27. Вы участвуете в телешоу. Перед вами три закрытые двери: за одной автомобиль, за каждой из двух других по козе. Шоу происходит следующим образом. Вы выбираете дверь, после чего ведущий открывает одну из двух других дверей, за которой нет автомобиля. Далее вы можете поменять свой выбор двери, а можете не менять. После этого вы выигрываете то, что находится за выбранной вами дверью. Что выгодно: менять дверь, или не менять?

1.28. В мешке лежат 10 карточек. На 5 с обеих сторон изображён Андрей Михайлович, на 4 с обеих сторон изображён Алексей Владимирович, а на одной оставшейся с одной стороны изображён Андрей Михайлович, а с другой стороны — Алексей Владимирович. Одна из карточек

выбирается наугад и кладётся на стол случайной стороной. Пусть на видимой стороне оказался Андрей Михайлович. Какова вероятность того, что с обратной стороны тоже будет Андрей Михайлович?

1.29. При посадке в самолёт выстроилась очередь из n пассажиров, у каждого из которых имеется билет на одно из n мест. Первой в очереди стоит сумасшедшая старушка. Она вбегает в салон и садится на случайное место (возможно, и на своё). Далее пассажиры по очереди занимают свои места. В случае, если место очередного пассажира уже занято, он садится случайным образом на одно из свободных мест. Какова вероятность того, что последний пассажир займёт своё место?

1.30. В семье пятеро детей. Гость считает, что мальчики и девочки рождаются равновероятно и независимо друг от друга. Ему стало достоверно известно, что двое мальчиков в семье точно есть. Какова вероятность того, что оставшиеся дети тоже мальчики?

1.31. Для таких трёх попарно независимых равновероятных событий A, B, C , что $A \cap B \cap C = \emptyset$, найдите максимально возможное значение вероятности $P(A)$ (она же $P(B)$ и $P(C)$).

1.32. Вы решили поехать на горнолыжку и звоните двум своим друзьям узнать, как там погода. Оба сказали, что снега нет. По вашим априорным данным, вероятность снега равна 0.8. Кроме того, ваши друзья могут пошутить с вероятностью 0.3 независимо друг от друга. Найдите апостериорную вероятность того, что идёт снег.

1.33. Если телефонный разговор длится время t , то вероятность закончить его в промежутке $(t, t + h)$ равна $\alpha h + o(h)$ при $h \rightarrow 0$. Найти вероятность того, что разговор продлится дольше времени t .

1.34. За бесконечным в две стороны столом (изоморфным целым числам) сидят бесконечное количество фивтов и пишут контрольную по ТВ. Каждый студент независимо от других имеет шанс $\frac{1}{2}$ решить контрольную. Если же он контрольную не решает, он имеет шанс $\frac{1}{2}$ списать её у соседа справа, при условии, что тот решил её. Аналогично с соседом слева. Найдите вероятность того, что студент на нулевом месте решит контрольную.

1.35. Геометрическое распределение обладает *отсутствием памяти*, то есть для $\xi \sim \text{Geom}(p)$

$$P\{\xi > m + n \mid \xi \geq n\} = P\{\xi > m\}$$

для всех $n, m \geq 0$.

1.36. Единственное распределение на натуральных числах, обладающее отсутствием памяти, — геометрическое распределение.

1.37 (Парадокс транзитивности). Для случайных величин ξ, η скажем, что « ξ больше η по вероятности», если $P\{\xi > \eta\} > P\{\xi \leq \eta\}$. Является ли отношение «больше по вероятности» транзитивным?

Тема 2: Математическое ожидание, дисперсия, ковариация

2.1. Шестигранный кубик подбрасывается независимо n раз. Случайная величина ξ равна количеству выпавших единиц, а η — сумме выпавших очков. Найдите математические ожидания этих величин.

2.2. Почтальон случайно перепутал n писем, адресованных n различным получателям. Ничтоже сумняшеся, он решил случайно перемешать письма и раздать их получателям. Найдите математическое ожидание количества людей, которые получают письма, предназначенные именно им.

2.3. Найдите математическое ожидание и дисперсию биномиального распределения.

2.4. Найдите математическое ожидание и дисперсию пуассоновского распределения.

2.5. Найдите математическое ожидание и дисперсию геометрического распределения.

2.6. Каждое ребро полного графа на n вершинах равновероятно (и независимо друг от друга) красят в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. Случайная величина ξ равна количеству красных треугольников. Найдите её математическое ожидание и дисперсию.

2.7. В урне лежат 10 белых и 10 чёрных шаров. К ней подходят 10 друзей и тянут из неё поочередно пары шаров (без возвращения). Найдите математическое ожидание и дисперсию количества вытянутых одноцветных пар.

2.8. Случайная величина ξ имеет распределение

$$P\{\xi = k\} = \frac{C}{k(k+1)} \quad \text{для } k = 1, 2, 3, \dots$$

Найдите константу $C \in \mathbb{R}$. Найдите для получившегося распределения математическое ожидание.

2.9 (Парадокс ожидания серии). Проводится серия испытаний Бернулли с вероятностью успеха $\frac{1}{2}$. Для $i, j \in \{0, 1\}$ обозначим через ξ_{ij} случайную величину, равную количеству испытаний до первого появления последовательности ij . (Формально, для каждой пары (i, j) нужно построить своё пространство конечных, но сколь угодно больших последовательностей, длина которых имеет геометрическое распределение.) Найдите математические ожидания случайных величин ξ_{00} и ξ_{01} .

2.10. Случайная величина ξ равновероятно принимает значения из некоторого конечного множества $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$. Найдите $\arg \min_a \mathbb{E} |\xi - a|$ и $\arg \min_b \mathbb{E} (\xi - b)^2$.

2.11. Случайные величины ξ и η независимы, одинаково распределены и имеют конечные математическое ожидание и дисперсию. Найдите коэффициент корреляции случайных величин $\xi_1 = \alpha\xi + \beta\eta$ и $\xi_2 = \alpha\xi - \beta\eta$. Когда они некоррелированы? Что в этом случае можно сказать об их независимости?

2.12. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ положительны, независимы в совокупности и имеют одно и то же невырожденное распределение. Положим

$$\eta_k := \frac{\xi_k}{\xi_1 + \dots + \xi_n} \quad \text{для любого } k = 1, \dots, n.$$

Найдите $\mathbb{E} \eta_k$ и коэффициент корреляции между η_k и η_ℓ для $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$.

Указание: пользуйтесь (би)линейностью, не расписывайте всё по определению!

2.13. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ независимы в совокупности. Определим случайные величины $\zeta_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $\zeta_n^* := \xi_1\eta_1 + \dots + \xi_n\eta_n$. Найти $\mathbb{E} \zeta_n$, $\mathbb{E} \zeta_n^*$, $\text{Var} \zeta_n$, $\text{Var} \zeta_n^*$, $\text{cov}(\zeta_n; \zeta_n^*)$, если $\mathbb{E} \xi_k = a$, $\text{Var} \xi_k = \sigma^2$, а $\eta_k \sim \text{Bern}(p)$.

2.14. Докажите следующее неравенство КБШ:

$$|\mathbb{E} \xi \eta| \leq \mathbb{E} |\xi \eta| \leq \sqrt{\mathbb{E} \xi^2} \sqrt{\mathbb{E} \eta^2}.$$

Выведите из него неравенство КБШ для ковариации.

2.15. Если конечно $\mathbb{E} \xi^2$, то конечно и $\mathbb{E} \xi$.

Тема 3: Неравенства и Предельные Законы

3.1. Пусть случайная величина ξ_n равна среднему значению очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Найдите предел по вероятности для ξ_n .

3.2. Для независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots \sim \text{Bern}(p)$ обозначим через η_n количество таких i от 1 до n , что $\xi_i = \xi_{i+1} = 1$. Найдите предел по вероятности для $\frac{\eta_n}{n}$.

3.3. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы, $\mathbb{E} \xi_k = a$, $\text{Var} \xi_k = \sigma^2 < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть

$$\zeta_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \xi_i \xi_j.$$

Найдите предел по вероятности для $\frac{\zeta_n}{n^2}$.

3.4. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ состоит из независимых одинаково распределённых случайных величин, $\mathbb{E} \xi_n = 0$, $\text{Var} \xi_n = \sigma^2 < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Удовлетворяют ли ЗБЧ последовательности случайных величин

$$\zeta_n = \xi_n + \xi_{n+1} \quad \eta_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n^{\frac{1}{3}} \rfloor} \xi_{n+k}?$$

3.5. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ образована независимыми случайными величинами

$$\mathbb{E} \xi_n = 0, \quad \text{Var} \xi_n = C \cdot n^\alpha, \quad C > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При каких значениях α последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ удовлетворяет ЗБЧ и при каких значениях α может не удовлетворять?

3.6. Последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ и $\eta_1, \eta_2, \dots$ образованы одинаково распределёнными случайными величинами, независимыми внутри каждой последовательности (случайные величины ξ_i и η_i могут не быть независимыми), $\mathbb{E} \xi_i = \mathbb{E} \eta_j = a$, $\text{Var} \xi_i = \text{Var} \eta_j < \infty$. Выполняется ли ЗБЧ для последовательности $\zeta_1, \zeta_2, \dots$, где

$$\zeta_{2k-1} = \xi_k, \quad \zeta_{2k} = \eta_k, \quad k \in \mathbb{N}?$$

3.7 (Обобщённое неравенство Маркова). Для любой неотрицательной функции $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, неубывающей и положительной на $[a, +\infty)$, и любой случайной величины ξ верно, что

$$P(\xi \geq a) \leq \frac{\mathbb{E} \varphi(\xi)}{\varphi(a)}.$$

3.8. Пусть ξ, η имеют конечные математические ожидания и дисперсии, а их корреляция равна ρ . Тогда

$$P \left\{ |\xi - \mathbb{E} \xi| \geq a \sqrt{\text{Var} \xi} \quad \text{или} \quad |\eta - \mathbb{E} \eta| \geq a \sqrt{\text{Var} \eta} \right\} \leq \frac{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}{a^2}.$$

Указание: $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$.

3.9. *It is Behrman's great masterpiece — he painted it there the night that the last leaf fell.*

Джонси наблюдает за тем, как за окном опадают листья. Она заметила, что на n -ый день осени за её окном пролетают n листьев, каждый из которых по схеме испытаний Бернулли с вероятностью $p_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ является кленовым, а с вероятностью $1 - p_n$ является листом плюща. Докажите, с каждым днём вероятность увидеть за окном кленовый лист стремится к нулю.

3.10. Пусть дана последовательность попарно некоррелированных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, у которых определены математические ожидания, а дисперсии равномерно ограничены некоторой константой. Обозначим $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$

$$P \left\{ \left| \frac{S_n - \mathbb{E} S_n}{n^{0.5+\delta}} \right| > \varepsilon \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

3.11. Покажите, существенно используя дискретность вероятностного пространства, что в ЗБЧ сходимость по вероятности можно заменить на сходимость с вероятностью 1 (т.н. почти наверное).

3.12. Выведите из Закона Больших Чисел (а точнее, из неравенства Чебышёва) теорему Вейерштрасса о том, что любую непрерывную функцию $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ можно сколь угодно точно приблизить многочленами.

Указание. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [0, 1]$ рассмотрите случайные величины $\xi_{n,x} \sim \text{Bin}(n, x)$ и полиномы Бернштейна $B_n(x) := \mathbb{E} f\left(\frac{\xi_{n,x}}{n}\right)$.

3.13. Покажите, что если нарушается условие независимости, то ЦПТ может не выполняться.

3.14 (Первая часть леммы Бореля–Кантелли). В любой последовательности событий $A_1, A_2, \dots$, при условии $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, с вероятностью 1 происходит лишь конечное число событий A_n .

3.15 (Усиленный Закон Больших Чисел в форме Кантелли). Пусть независимые случайные величины ξ_n имеют нулевое математическое ожидание, и $\mathbb{E} \xi_n^4 \leq C$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = 0$ с вероятностью 1. *Доказательство не должно явно использовать дискретность пространства.*

Тема 4: Системы множеств

4.1. Имеются множества A и B , отображение $f: A \rightarrow B$, некоторая система $\mathcal{A}$ подмножеств множества A , и некоторая система $\mathcal{B}$ подмножеств множества B . Обозначим

$$f(\mathcal{A}) := \{f(X) \subset B : X \in \mathcal{A}\} \quad \text{и} \quad f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(Y) \subset A : Y \in \mathcal{B}\}.$$

- (а) Если $\mathcal{B}$ — кольцо, то $f^{-1}(\mathcal{B})$ — тоже кольцо.
- (б) Если $\mathcal{B}$ — σ -алгебра, то $f^{-1}(\mathcal{B})$ — тоже σ -алгебра.
- (с) Система $f(\mathcal{A})$ не обязана быть полукольцом, даже если $\mathcal{A}$ — σ -алгебра.

4.2. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — две σ -алгебры с общей единицей. Обязательно ли являются σ -алгебрами

- (а) $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, (б) $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, (с) $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$, (д) $\mathcal{F} \triangle \mathcal{G}$? А какие из них могут являться?

4.3. Иногда полуалгеброй называют (непустую) систему подмножеств множества Ω , замкнутую относительно пересечения, и с таким дополнительным свойством: для любого элемента полуалгебры его дополнение (до Ω) представимо в виде дизъюнктивного конечного объединения элементов полуалгебры.

Покажите, что полуалгебра в новом смысле является полукольцом, но обратное не всегда верно. Является ли полуалгебра в нашем (старом) смысле полуалгеброй в новом смысле? А наоборот?

4.4. Приведите пример кольца, не являющегося алгеброй; σ -кольца, не являющегося σ -алгеброй.

4.5. Любое σ -кольцо является δ -кольцом. Обратное верно для σ - и δ -алгебр, но не для σ - и δ -колец.

4.6. Опишите σ -кольцо и σ -алгебру, порождённые одноточечными подмножествами прямой.

4.7. Для всякого элемента из порождённого кольца $R(\mathcal{X})$ найдётся конечное покрытие элементами из $\mathcal{X}$.

4.8. Если система $\mathcal{X}$ не более чем счётна, то и наименьшее кольцо $R(\mathcal{X})$ не более чем счётно.

4.9. Любой элемент порождённого σ -кольца $\sigma(\mathcal{X})$ лежит в другом порождённом σ -кольце $\sigma(\mathcal{Y})$ для некоторого не более чем счётного подсемейства $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$.

4.10. Для системы $\mathcal{X}$ с единицей и произвольного B обозначим $\mathcal{X} \cap B := \{X \cap B : X \in \mathcal{X}\}$. Тогда для порождённых σ -алгебр выполняется

$$\sigma(\mathcal{X} \cap B) = \sigma(\mathcal{X}) \cap B.$$

4.11. Мощность любой конечной σ -алгебры является степенью двойки.

4.12. Если σ -алгебра бесконечна, то она несчётна.

4.13. Покажите, что любое открытое множество на прямой представляется в виде дизъюнктного не более чем счётного объединения интервалов (возможно, бесконечных). Выведите отсюда упражнение 4.Н.

Тема 5: Знай меру

Напомним, что здесь мы пока работаем с конечной аддитивной мерой.

5.1. Пусть m — мера на полукольце $\mathcal{S}$. Если $A, B, A \triangle B \in \mathcal{S}$ и $m(A \triangle B) = 0$, то $m(A) = m(B)$.

5.2. Пусть m — мера на полукольце $\mathcal{S}$. Обозначим $\mathcal{X} := \{A \in \mathcal{S} : m(A) = 0\}$.

(а) $\mathcal{X}$ тоже полукольцо.

(б) Если $\mathcal{S}$ — кольцо, то и $\mathcal{X}$ — кольцо.

(с) Если $\mathcal{S}$ — алгебра, то $\mathcal{X}$ необязательно является алгеброй. В каком случае $\mathcal{X}$ будет являться алгеброй?

5.3. Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, и функция $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty)$ такова, что для любых дизъюнктных $A, B \in \mathcal{S}$ из $A \sqcup B \in \mathcal{S}$ следует $\varphi(A \sqcup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$. Обязательно ли φ является мерой?

5.4. Для меры ν на кольце и элемента E из кольца отображение $A \mapsto \nu(A \cap E)$ является мерой на том же кольце.

5.5. Для любых мер $m_1, \dots, m_k$ на одной и той же системе множеств и любых $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+$ линейная комбинация $\lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_k m_k$ тоже является мерой (на той же системе множеств).

5.6. Для меры ν на кольце введём на элементах кольца бинарное отношение $\sim$ по правилу « $A \sim B$, если $\nu(A \triangle B) = 0$ ». Является ли оно отношением эквивалентности?

5.7. Для меры ν на кольце введём для множеств из кольца функцию $\rho(A, B) := \nu(A \triangle B)$. Тогда ρ неотрицательна, симметрична, удовлетворяет неравенству треугольника, и $\rho(A, B) = 0$ равносильно тому, что $A \sim B$. (Иными словами, ρ является метрикой на кольце, профакторизованном по отношению из предыдущей задачи.)

5.8. Покажите связь σ -аддитивности и непрерывности снизу меры на полукольце и на кольце.

5.9. Покажите связь σ -аддитивности и непрерывности сверху меры на полукольце и на кольце.

5.10. Приведите пример не σ -аддитивной меры на некоторой алгебре множеств.

Для последовательности $\{A_n\}$ множеств назовём её *нижним пределом*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

множество элементов, каждый из которых принадлежит всем множествам последовательности, начиная с некоторого номера. Назовём её *верхним пределом*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

множество элементов, каждый из которых встречается в последовательности бесконечное количество раз.

5.11. Для σ -аддитивной меры μ на σ -кольце и произвольных элементов $A_1, A_2, \dots$ этого σ -кольца выполнено

$$\mu \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \mu \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \right).$$

5.12 (Первая часть леммы Бореля-Кантелли). Если в предыдущей задаче дополнительно потребовать $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, то во всей цепочке неравенств стоят нули.

Дополнительные задачи

5.13. На подмножествах $A \subset \mathbb{N}$ определим меру

$$m(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap \{1, \dots, n\}|}{n}$$

там, где предел существует. Докажите, что на классе множеств, на которых существует предел, эта мера конечно-аддитивна, но не σ -аддитивна.

В предыдущей задаче класс множеств, на которых определена мера, к сожалению, даже полукольцом не является (но саму меру можно сузить до меры на алгебре). В следующих задачах мы разовьём подход, который позволяет строить меры на произвольных множествах и достаточно больших σ -алгебрах.

Фильтром на Ω называется собственная система $\mathcal{U} \subsetneq 2^\Omega$ множеств, которая замкнута относительно конечных пересечений и взятия надмножества. Максимальный по включению фильтр называется *ультрафильтром*. Иными словами, $\mathcal{U}$ является ультрафильтром, если

1. $\emptyset \notin \mathcal{U}$,
2. $A \cap B \in \mathcal{U}$ для любых $A, B \in \mathcal{U}$,
3. $A \in \mathcal{U}$ для любых $A \supset B \in \mathcal{U}$,
4. для любого $A \subset \Omega$, либо само A лежит в ультрафильтре, либо его дополнение $\bar{A}$.

5.14. По любому ультрафильтру на Ω можно задать меру $2^\Omega \rightarrow \{0, 1\}$, присвоив значение 1 ровно тем множествам, которые лежат в ультрафильтре. Обратно, если имеется мера $2^\Omega \rightarrow \{0, 1\}$, равная 1 на всей Ω , то система множеств меры 1 образует ультрафильтр.

Замкнутый относительно счётных пересечений ультрафильтр называется σ -полным.

5.15. Ультрафильтр является σ -полным ровно в том случае, когда мера, заданная по нему, является σ -аддитивной.

Ультрафильтр называется *главным*, если он содержит минимальный элемент. Нетрудно убедиться, что этот минимальный элемент обязан быть синглетоном. Нас более интересуют *неглавные* ультрафильтры: иными словами, такие, пересечение всех чьих элементов пусто.

5.16. Какому свойству индуцированной меры соответствует неглавность ультрафильтра?

5.17 (Теорема Улама). Докажите, что если на Ω существует неглавный σ -полный ультрафильтр, то Ω имеет мощность строго больше континуума. Как это переформулируется в терминах мер?

Тема 6: Внешняя мера. Измеримые множества

Напомним, что здесь мы стартуем с конечной или σ -конечной меры m на полуалгебре $\mathcal{S}$. Если не оговорено противное, мера предполагается σ -аддитивной.

6.1. Приведите пример такой полуалгебры и такой σ -аддитивной меры на ней, что построенная по ним внешняя мера не является аддитивной.

6.2. Приведите пример меры на полуалгебре, имеющей несколько различных продолжений на некоторую σ -алгебру.

6.3. Приведите пример меры на некоторой системе множеств, имеющей несколько различных продолжений на порождённую σ -алгебру.

6.4. Существует такая мера на полуалгебре полуинтервалов на прямой, что построенный по ней класс измеримых множеств совпадает с $2^{\mathbb{R}}$.

6.5. Докажите, что если мера m вопреки определению не σ -аддитивна, то обязательно найдётся такое множество $A \in \mathcal{S}$, что $\mu^*(A) < m(A)$. Может ли найтись такое множество $B \in \mathcal{S}$, что $\mu^*(B) > m(B)$?

6.6. Если строить меру Лебега по σ -аддитивной мере на полукольце, не являющемся полуалгеброй, и разрешить внешней мере принимать бесконечные значения, то класс измеримых множеств будет образовывать кольцо, но может не образовывать алгебру.

6.7. Пусть λ — классическая мера Лебега на $[0, 1]$. Тогда существует такая последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств, что

$$\lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) < \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n).$$

6.8. Определение внешней меры не изменится, если инфимум брать по покрытиям дизъюнктными множествами из полуалгебры.

6.9. Постройте на плоскости измеримое по Лебегу множество, проекции которого на обе координатные оси неизмеримы.

6.10. Постройте на плоскости измеримое по Лебегу множество, у которого проекция на одну координатную ось измерима, а проекция на другую ось — нет.

6.11. Докажите, что для классической меры Лебега на прямой дополнение множества нулевой меры всюду плотно. А само это множество может быть всюду плотным?

6.12. Любое счётное подмножество прямой является борелевским множеством, классическая мера Лебега которого равна нулю.

6.13. Покажите связь σ -аддитивности и непрерывности сверху и снизу для σ -конечных мер.

6.14. Постройте σ -конечную σ -аддитивную меру на σ -алгебре $2^{\mathbb{N}}$ всех множеств натуральных чисел.

6.15. Приведите пример какой-нибудь бесконечной, но не σ -конечной меры.

6.16. Покажите, что σ -аддитивная, но не σ -конечная мера на полуалгебре (и даже на алгебре) может иметь не единственное σ -аддитивное продолжение на порождённую σ -алгебру.

6.17. Никакое σ -конечное пространство не разбивается на несчётное объединение множеств положительной меры.

6.18. Для любого множества A , измеримого в смысле классической меры Лебега, найдутся такие борелевские множества B, C , что $B \subset A \subset C$ и $\lambda(C \setminus B) = 0$.

6.19. Любое измеримое по классической мере Лебега множество представимо в виде дизъюнктного объединения борелевского множества и множества нулевой меры.

Дополнительные задачи

6.20. Борелевской σ -алгеброй на окружности (в евклидовом пространстве) назовём σ -алгебру, порождённую открытыми дугами. Покажите, что на окружности существует единственная σ -аддитивная мера, инвариантная относительно вращения на окружности, и на всей окружности принимающая значение 1.

Следующие три задачи посвящены *пополнению меры*.

6.21. Рассмотрим σ -алгебру измеримых множеств с (конечной σ -аддитивной) мерой μ (необязательно полной). Тогда класс множеств вида $E \triangle N$, где E измеримо, а N является подмножеством множества нулевой меры, совпадает с классом множеств вида $E \sqcup N$, а также совпадает с классом множеств вида $E \cup N$, и является σ -алгеброй.

6.22. На множествах из задачи 6.21 определим меру $\bar{\mu}(E \triangle N) := \mu(E)$. Это определение корректно, и мера $\bar{\mu}$ является конечной, σ -аддитивной, полной, и продолжает меру μ .

6.23. Рассмотрим (конечную σ -аддитивную) меру на полуалгебре $\mathcal{S}$. Обозначим через η меру на $\sigma(\mathcal{S})$, существующую по теореме Каратеодори. Обозначим через $\bar{\eta}$ меру, построенную в задаче 6.22. Тогда класс $\bar{\eta}$ -измеримых множеств, построенный в задаче 6.21, совпадает с классом измеримых по Лебегу множеств, и мера $\bar{\eta}$ совпадает с мерой Лебега.

Следующие две задачи интересны в контексте теории вероятностей.

6.24. Пусть на борелевской σ -алгебре прямой задана (конечная σ -аддитивная) мера μ . Тогда $\mu(B) = \inf \mu(U)$ для любого борелевского B , где инфимум берётся по всем открытым множествам $U \supset B$.

6.25. Пусть на борелевской σ -алгебре прямой задана (конечная σ -аддитивная) мера μ . Тогда $\mu(B) = \sup \mu(K)$ для любого борелевского B , где супремум берётся по всем компактам $K \subset B$.

6.26. Для конечной меры μ множество A измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда

$$\mu^*(A) + \mu^*(\Omega \setminus A) = \mu(\Omega).$$

6.27. Для конечной меры μ множество A измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда для произвольного множества E выполнено

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

6.28. Для любого множества $A \subset \mathbb{R}$ положительной классической меры Лебега и любого $\alpha \in [0, 1]$ найдётся такой (ограниченный открытый) интервал $U \subset \mathbb{R}$, что $\lambda(A \cap U) \geq \alpha \lambda(U)$.

Указание: воспользуйтесь задачами 4.13, 6.24.

6.29. Для любого множества $A \subset \mathbb{R}$ положительной классической меры Лебега найдётся (ограниченный открытый) интервал, накрывающий 0 и целиком лежащий в $A - A := \{a - a' : a, a' \in A\}$.

Указание: $x \in A - A$ равносильно тому, что множества A и $A + x$ пересекаются.

Тема 7: Борелевские множества и мера Лебега–Стилтьеса

7.1. Борелевская σ -алгебра континуальна.

7.2. Используя предыдущую задачу, на примере множества Кантора доказать, что мера Бореля не полна.

7.3. Борелевская σ -алгебра плоскости порождается всеми квадратами. (А также кругами, треугольниками, звёздочками, котиками, ...)

7.4. Борелевская σ -алгебра плоскости не порождается множеством всех отрезков.

Указание: используйте задачу 7.2 и тот факт, что мера Лебега на отрезке не является мерой Бореля.

7.5. Существует ли счётный набор непересекающихся множеств, порождающий борелевскую σ -алгебру?

7.6. Для любого $q \in [0, 1]$ постройте на отрезке «толстое» множество Кантора, то есть континуальный компакт лебеговой меры q без внутренних точек.

7.7. Найти лебеговскую меру множества точек прямой, не имеющих 1 в десятичной записи.

7.8. Опишите построение канторовой пыли — двумерного аналога канторова множества. Какими свойствами она обладает?

7.9. Для меры Лебега–Стилтьеса μ_F найдите меры точки, интервала, отрезка, полуинтервала, всей прямой.

7.10. Подберите функцию $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ так, чтобы любое множество $A \subset (-\infty, 0]$ имело нулевую меру Лебега–Стилтьеса, и чтобы $\mu_F(a, b] = e^{-a} - e^{-b}$ при $a, b > 0$.

Следующие две задачи посвящены построению взаимно-сингулярных мер.

7.11. Постройте две такие борелевские меры μ, ν на $[0, 1]$, что $\mu[0, 1] = \nu[0, 1] = 1$, но при этом $\nu(A) = \mu(B) = 0$ для некоторого разбиения $[0, 1] = A \sqcup B$. Рассмотрите случаи, когда μ - и ν -меры синглетонов равны нулю, и когда это не выполняется.

7.12. Решите предыдущую задачу в случае, когда одна из мер — классическая мера Лебега.

7.13. Пусть (ограниченная, непрерывная справа, нестрого возрастающая) функция $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ кусочно-постоянна и имеет конечное число точек разрыва. Найдите класс множеств, измеримых относительно меры Лебега–Стилтьеса μ_F .

7.14. Для (нестрого возрастающей ограниченной) липшицевой функции $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ из измеримости относительно классической меры Лебега λ следует измеримость относительно меры Лебега–Стилтьеса μ_F .

Функция $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая $\delta > 0$, что $\sum_{n=1}^N |F(a_n) - F(b_n)| < \varepsilon$ для любого конечного семейства непересекающихся интервалов $(a_n, b_n) \subset \mathbb{R}$ суммарной длины меньше δ .

7.15. Для (нестрого возрастающей ограниченной) абсолютно непрерывной функции $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ из измеримости относительно классической меры Лебега λ следует измеримость относительно меры Лебега–Стилтьеса μ_F .

Тема 8: Измеримые функции

8.1. Пусть $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ — некоторое всюду плотное множество. Функция $f: (X, \sigma_X) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ измерима тогда и только тогда, когда измеримы прообразы $\{f < c_n\}$ для всех c_n .

8.2. Для последовательности борелевских функций $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ множество точек, на которых функции сходятся, борелевское.

8.3. На измеримом пространстве (X, σ_X) индикатор $\mathcal{I}_A: (X, \sigma_X) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ измерим одновременно с $A \subset X$.

8.4. Любая монотонная функция $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ измерима относительно классической меры Лебега.

8.5. Постройте функцию $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, неизмеримую относительно классической меры Лебега, но такую, что $f^{-1}(c)$ измеримо по Лебегу для любого $c \in \mathbb{R}$.

8.6. Опишите измеримые функции, для которых σ -алгебры прообразов борелевских множеств имеют мощности (а) 2; (б) 4; (с) 2^n .

8.7. Посмотрим на функции синус и косинус как на $[0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Опишите σ -алгебры $\sigma(\sin)$ и $\sigma(\cos)$.

8.8. Для измеримой функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ найдите меру $\mu \circ f^{-1}$ в случае, когда а) $f = \text{const}$, б) $f = \mathcal{I}_A$. (Определение см. перед теоремой 9.13.)

8.9. Рассмотрим измеримое пространство (X, σ_X, μ) . Если измеримая функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ строго положительна на некотором множестве положительной меры, то она отделима от нуля на (возможно, другом) множестве положительной меры: то есть, найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $\mu\{f \geq \varepsilon\} > 0$.

8.10. Для любой измеримой почти всюду ограниченной функции f существуют простые функции φ_n , сходящиеся к f равномерно почти всюду.

8.11. Для всякой измеримой по Лебегу функции найдётся борелевская функция, равная данной почти всюду.

Последние несколько задач посвящены наследованию измеримости.

8.12. Пусть μ — полная мера, $f = g$ п.в. и f — измерима. Тогда g тоже измерима.

8.13. Для полной меры при сходимости почти всюду наследуется измеримость предела.

8.14. Покажите, что в предыдущих двух задачах полнота меры важна.

Тема 9: Сходимости измеримых функций

9.1. Выделите в контрпримере Рисса подпоследовательность, сходящуюся почти всюду.

9.2. Занумеруем $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n=1}^\infty$. Определим измеримые $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ как

$$f_n(x) := \begin{cases} q_n, & \text{если } x = q_n; \\ \frac{1}{n(x-q_n)}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажите, что f_n сходятся по классической мере Лебега, и найдите предел.

9.3. Докажите по определению единственность (с точностью до эквивалентности) предела в почти равномерной сходимости.

9.4. Если неотрицательные f_n сходятся по мере к f , то f неотрицательна п.в.

9.5. Если f_n сходятся по мере к нулю, то и f_n^2 сходятся по мере к нулю.

9.6. Если f_n сходятся по мере к f , то $|f_n|$ сходятся по мере к $|f|$.

9.7. На пространстве $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ со считающей мерой (то есть мера множества равна его мощности) сходимость по мере равносильна равномерной сходимости.

9.8. Пусть последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна по мере, и некоторые её подпоследовательности f_{n_i} и f_{n_j} сходятся почти всюду к f и g , соответственно. Верно ли, что тогда $f \sim g$?

9.9. Пусть функции $\{f_n\}$ фундаментальны по мере, и некоторая подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится по мере к измеримой функции f . Тогда вся последовательность f_n сходится к f по мере.

9.10. Выведите теорему Рисса для конечной меры напрямую из критерия сходимости почти всюду. Отсюда диагональным методом получите теорему Рисса для σ -конечной меры.

9.11. На дискретном измеримом пространстве конечной меры сходимости почти всюду и по мере равносильны.

9.12. На конечном измеримом пространстве сходимости почти всюду и по мере равносильны.

Тема 10: Интеграл Лебега

10.1. Если $f = 0$ п.в., то интеграл Лебега от неё равен нулю.

10.2. Приведите пример борелевской функции, интегрируемой по Лебегу, но не по Риману.

10.3. Пусть $X = \mathbb{R}$, $\sigma_X = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $\mu(B) = |B \cap \mathbb{Z}|$. Вычислите $\int e^{-|x|} d\mu(x)$.

10.4. Если функция f интегрируема, то для всех $\varepsilon > 0$ множества $\{f > \varepsilon\}$ имеют конечную меру.

10.5. На пространстве $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}, \mu)$ с мерой $\mu(A) = |A|$ опишите класс интегрируемых функций.

10.6. Пусть простые интегрируемые функции фундаментальны в среднем. Верно ли, что тогда они сходятся в среднем к некоторой простой функции?

10.7. Для множеств A, B конечной меры выполнено $\rho(\mathcal{I}_A, \mathcal{I}_B) = \mu(A \triangle B)$.

10.8. Заряд непрерывен сверху и снизу.

10.9. Заряд Q монотонен тогда и только тогда, когда Q или $-Q$ является мерой.

10.10. Приведите пример заряда на алгебре, не имеющего σ -аддитивного продолжения на порождённую σ -алгебру.

10.11. Пусть для неотрицательного заряда Q верно, что $Q(E) = 0$ для всякого $E \in \sigma_X$, удовлетворяющего $\mu(E) = 0$. Тогда $Q \ll \mu$.

10.12. На прямой с классической мерой Лебега введём новую меру $\mu(E) := \mathcal{I}_E(0)$, т.н. *дельта-мера Дирака*. Является ли она абсолютно непрерывной относительно классической меры Лебега?

10.13. Является ли бинарное отношение $\ll$ на мерах симметричным? рефлексивным? транзитивным? Любые ли две меры сравнимы по этому отношению?

10.14. На пространстве конечной меры сходимость $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$ равносильна сходимости

$$\int \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

10.15. Пусть на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ для интегрируемой f для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено $\int_{-\infty}^x f d\lambda = 0$. Тогда $f = 0$ п.в.

Дополнительные задачи

10.16. Докажите, что если интегрируемая функция f положительна почти всюду на некотором E и $\int_E f = 0$, то $\mu(E) = 0$. Выведите отсюда интегральное свойство 10.18.

10.17 (Неравенство Йенсена). Пусть (X, σ_X, μ) — вероятностное пространство, то есть измеримое пространство с σ -аддитивной мерой и $\mu(X) = 1$. Пусть функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема, а функция $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз, и $V \circ f$ тоже интегрируема. Тогда

$$V\left(\int f\right) \leq \int V \circ f.$$

Указание: выпуклость функции V означает, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдётся такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $V(t) \geq V(t_0) + \alpha(t - t_0)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

10.18 (Неравенство Гёльдера). Зафиксируем такие $1 < p, q < \infty$, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пусть $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ суть две неотрицательные измеримые функции, причём интегрируемы функции f^p , g^q , и произведение fg . Тогда

$$\int fg \leq \left(\int f^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Указание. Отнормируйте функцию g так, чтобы $\int g^q = 1$. Примените неравенство Йенсена для новой функции fg^{1-q} и выпуклой $V(t) = t^p$, взяв интеграл от заряда Q_{g^q} (см. задачу 11.7).

Тема 11: Теоремы о предельном переходе

11.1. Пусть на пространстве конечной меры интегрируемые функции f_n сходятся равномерно к измеримой функции f . Тогда f интегрируема, и f_n сходятся к ней в среднем.

11.2. Пусть интегрируемые f_n сходятся в среднем к интегрируемой f , а функция g ограничена почти всюду. Тогда $f_n g$ сходятся в среднем к fg .

11.3. Пространство ступенчатых функций на отрезке всюду плотно в среднем (по классической мере Лебега) в пространстве интегрируемых функций (на том же отрезке; напомним, что ступенчатой функцией называется простая функция, прообразы значений которой не просто измеримы, а являются отрезками).

11.4. Для любой неотрицательной измеримой функции f выполнено

$$\int f = \sup \int \varphi,$$

где супремум берётся по всем простым функциям $\varphi \leq f$, причём значение супремума конечно тогда и только тогда, когда функция f интегрируема.

11.5 (Критерий интегрируемости). На пространстве конечной меры неотрицательная измеримая функция f интегрируема тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \mu\{n \leq f < n+1\} < \infty$$

что равносильно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{f \geq n\} < \infty.$$

11.6. Пусть $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая ограниченная измеримая функция, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$. Определим функции $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ как $f_n(x) = g(x+n)e^{-x}$. Доказать существование и найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n d\lambda$.

11.7. Пусть $g \geq 0$ интегрируема по мере μ , а f такова, что fg тоже интегрируема. Тогда

$$\int f dQ_g = \int fg d\mu.$$

пәәл һәмдәш эшнәвндә :әннәвәл

11.8. Покажите, что лемма Фату не работает, если функции могут принимать отрицательные значения.

11.9. Покажите, что теорема Лебега о мажорируемой сходимости не работает при отсутствии интегрируемой мажоранты.

11.10. Из сходимости в среднем может не следовать сходимость почти всюду. Из сходимостей почти всюду и по мере может не следовать сходимость в среднем (даже для интегрируемых функций).

Дополнительные задачи

11.11. Пусть измеримая функция $f: X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что функции $x \mapsto f(x, t)$ интегрируемы для всех $t \in [0, 1]$, функции $t \mapsto f(x, t)$ непрерывны для всех $x \in X$, и $|f(x, t)| \leq F(x)$ для всех $(x, t) \in X \times [0, 1]$, где $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема. Тогда функция $t \mapsto \int_X f(x, t) d\mu(x)$ непрерывна.

пәәл һәмдәш эшнәвндә :әннәвәл

11.12. Пусть измеримая функция $f: X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что функции $x \mapsto f(x, t)$ интегрируемы для всех $t \in [0, 1]$, существуют частные производные $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$ для всех $x \in X$, и $\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right| \leq F(x)$ для всех $(x, t) \in X \times [0, 1]$, где $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема. Тогда функция $t \mapsto \int_X f(x, t) d\mu(x)$ дифференцируема по t .

11.13. Пусть неотрицательные f_n сходятся п.в. к нулю, интегрируемы на $[0, 1]$ вместе со своими квадратами, и

$$\int_0^1 f_n^2 \leq 2 \int_0^1 f_n.$$

Докажите существование и найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (f_n - 1)^2$. *һәмдәш һәмдәш эшнәвндә :әннәвәл*

11.14. Функция $\frac{\sin x}{x}$ неинтегрируема по Лебегу на всей прямой (как известно, в отличие от условной интегрируемости по Риману в несобственном смысле).

Тема 12: Производная Радона—Никодима

12.1. Пусть на измеримом пространстве (X, σ_X, μ) задана ещё одна под- σ -алгебра $\mathcal{F} \subset \sigma_X$, и оказалось, что для двух σ_X -измеримых μ -интегрируемых функций f, g для всех $A \in \mathcal{F}$ выполнено

$$\int_A f = \int_A g.$$

Приведите пример, показывающий, что f и g могут оказаться неэквивалентными. Какое дополнительное условие нужно наложить на них, чтобы они оказались эквивалентными?

12.2. Пусть на измеримом пространстве (X, σ_X, μ) имеется некоторая интегрируемая функция f и некоторая под- σ -алгебра $\mathcal{F} \subset \sigma_X$. Найдите такую $\mathcal{F}$ -измеримую функцию g , что для всех $A \in \mathcal{F}$ выполнено

$$\int_A f = \int_A g.$$

Рассмотрите случаи $\mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$ или $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, X \setminus A, X\}$, а $\mu(X) = 1$.

Далее полагаем, что на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ задана вероятностная мера μ , то есть она σ -аддитивна и $\mu(\Omega) = 1$. Зафиксируем некоторую под- σ -алгебру $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ с той же единицей Ω . Рассмотрим измеримую интегрируемую функцию $f: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Её *условным математическим ожиданием относительно $\mathcal{G}$* называется производная Радона—Никодима

$$\frac{d(Q_f)|_{\mathcal{G}}}{d\mu|_{\mathcal{G}}}.$$

На самом деле, вы с этим объектом уже встречались, например, в задаче 2.9.

12.3. Докажите, что такое определение корректно: а именно, что производная Радона—Никодима вообще существует.

12.4. Докажите, что условное математическое ожидание g является $\mathcal{G}$ -измеримым и удовлетворяет интегральному свойству

$$\int_G f d\mu = \int_G g d\mu$$

для всех $G \in \mathcal{G}$. Докажите, что g однозначно (с точностью до п.в.) определяется двумя этими свойствами.

12.5. Пусть $\mathcal{G}$ порождена некоторым разбиением $\Omega = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Найдите условное математическое ожидание функции f относительно $\mathcal{G}$.

12.6. Найдите условное математическое ожидание простой функции f относительно $\sigma(h)$, где h — тоже простая функция.

Тема 13: Произведение мер. Теорема Фубини

13.1. Приведите пример неинтегрируемой функции, для которой оба повторных интеграла конечны и равны.

13.2. Приведите пример неинтегрируемой функции для которой оба повторных интеграла конечны, но не равны.

13.3. Приведите пример неинтегрируемой функции, для которой один из повторных интегралов конечен, а другой бесконечен.

13.4. Приведите пример неотрицательной неизмеримой функции, для которой повторные интегралы корректно определены и конечны.

13.5. Приведите пример двух пространств (X, σ_X, μ) и (Y, σ_Y, ν) , где по крайней мере одна из мер не σ -конечна, и пример такого измеримого множества $A \in \sigma_X \otimes \sigma_Y$, что оба интеграла

$$\int_X \nu(A_x) d\mu(x) \quad \text{и} \quad \int_Y \mu(A^y) d\nu(y)$$

существуют и конечны, но не равны.

13.6. График борелевской функции имеет нулевую меру Лебега.

13.7. Пусть неотрицательная функция f такова, что для некоторого $p > 0$ её степень f^p интегрируема. Тогда

$$\int f^p d\mu = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu\{f > t\} dt.$$

13.8. Пусть по лестнице Кантора $c: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ построена мера Лебега–Стилтьеса μ_c . Найдите $\int_0^1 \mu_c(dx)$ и $\int_0^1 x \mu_c(dx)$.

13.9. Пусть f интегрируема на (X, μ) , а g интегрируема на (Y, ν) . Тогда функция $fg: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по мере $\mu \otimes \nu$, и

$$\int_{X \times Y} fg d(\mu \otimes \nu) = \int_X f d\mu \int_Y g d\nu.$$

13.10. Вычислите $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

Дополнительные задачи

13.11. Для полуколец $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ класс $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ является полукольцом.

13.12. Покажите, что класс $\sigma_X \times \sigma_Y$ измеримых прямоугольников может не являться кольцом, даже если σ_X, σ_Y суть σ -алгебры.

13.13. Если функция f интегрируема по классической мере Лебега на прямой, то ряд $\sum_{n=1}^\infty f(n+x)$ сходится абсолютно для почти всех x .

РЕШЕНИЯ СТУДЕНТОВ

Решение упражнения 1.A; Гумерова Лэйла. Покажем, что независимость в совокупности сохраняется при замене одного события на его дополнение. Тогда любые замены нескольких событий на их дополнения можно заменить на композицию изменений по одному событию на дополнение, каждое из которых не влияет на независимость в совокупности. Рассмотрим $I \subset \{1 \dots n\}$, $j \in \{1 \dots n\}$, $j \notin I$: $P(A_{i_1} \dots A_{i_k} A_j) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}) P(A_j)$. При этом мы знаем, вследствие независимости в совокупности, что $P(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$. Обозначим $A := A_{i_1} \dots A_{i_k}$, тогда надо показать, что если $P(AA_j) = P(A) \cdot P(A_j)$, то это верно и при дополнении A_j . Заменяем A_j на дополнение: $P(\overline{A_j}) = 1 - P(A_j)$, получим в правой части $P(A) - P(A) \cdot P(A_j)$ — это как раз мы взяли всю вероятность события A и убрали вероятность одновременно событий A и A_j . То есть осталась вероятность, что событие A случится, а A_j — нет. Это как раз $P(A\overline{A_j})$. $\square$

Решение упражнения 1.B; Гумерова Лэйла. У нас есть $\xi: \Omega \rightarrow \{c\}$. Тогда $P_\xi(c) = P\{\xi = c\} = 1$. А если $x \neq c$: $P_\xi(x) = P\{\xi = x\} = 0$. Итого распределение константы: $\{(c, 1)\}$. $\square$

Решение упражнения 1.C; Гумерова Лэйла. Если случайные величины независимы в совокупности, то можно, в том числе, взять поднабор из двух случайных величин и получить, что они независимы попарно. Посмотрим на следующий пример, построенный на основании примера для событий. Пусть I_1 — индикатор красного цвета, I_2 — зелёного, а I_3 — синего (смотрим тетраэдр с вершиной каждого цвета и 4 вершиной всех трёх цветов, оценивая вероятность, какой цвет будет сверху). Тогда $P\{I_i = 1\} = \frac{1}{2}$; $P\{I_i = 1; I_j = 1\} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ — попарно независимы. Но $P\{I_1 = 1; I_2 = 1; I_3 = 1\} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ — нет совокупной независимости. $\square$

Решение упражнения 1.E; Гумерова Лэйла. Пусть A — результат броска первого кубика, B — второго. Тогда $P\{A = k\} = P\{B = k\} = \frac{1}{6} \mid k = 1 \dots 6$. Надо найти распределение $C = A + B$.

$P\{C = n\} = \sum_{k=1}^{\min(6;n)} P\{A = k\} \cdot P\{B = n - k\}$. Нехитрый подсчёт рождает ответ:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(C = n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\square$

Решение упражнения 1.F; Гумерова Лэйла. Доказательство проведём индукцией по n .

База: $n = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} S_1 &= X_1 \sim \text{Bern}(p); \\ P\{S_1 = 1\} &= p = \binom{1}{1} p^1 (1-p)^0; \\ P\{S_1 = 0\} &= 1-p = \binom{1}{0} p^0 (1-p)^1. \end{aligned}$$

Переход: пусть верно для $n-1$. Тогда $S_{n-1} = X_1 + \dots + X_{n-1} \sim \text{Bin}(n-1, p)$ и $S_n = S_{n-1} + X_n$, события независимы.

Отсюда

$$\begin{aligned} P\{S_n = k\} &= P\{S_{n-1} + X_n = k\} = \\ &= P\{X_n = 0\} \cdot P\{S_{n-1} = k\} + P\{X_n = 1\} \cdot P\{S_{n-1} = k-1\} = \\ &= (1-p) \cdot \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k} + p \cdot \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \\ &= p^k (1-p)^{n-k} \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

□

Решение упражнения 4.A; Гумерова Лэйла. Рассмотрим произвольное $A \in S$. Тогда $\emptyset = A \setminus A$ распадается в дизъюнктное объединение множеств из S , но это может быть только одно пустое множество, значит оно лежит в полукольце. □

Решение упражнения 4.B; Гумерова Лэйла. $\Rightarrow$ Рассмотрим $A, A_1 \in S$; $A_1 \subset A$. По определению полукольца $A \setminus A_1 = \bigsqcup_{k=1}^n B_k$, где $B_k \in S$. Положим $A_{k+1} = B_k$. Тогда $A \setminus A_1 = \bigsqcup_{k=2}^{n+1} A_k$, откуда

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n+1} A_k.$$

$\Leftarrow$ Рассмотрим $A, B \in S$. Положим $C = A_1 = B_1 = A \cap B \subset A, B$ — элемент полукольца, так как оно замкнуто относительно пересечений. Тогда по данному утверждению найдутся такие $A_2 \dots A_n \in S$, что $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$ и такие $B_2 \dots B_n \in S$, что $B = \bigsqcup_{k=1}^n B_k$. Тогда $A \setminus B = \bigsqcup_{k=2}^n A_k$, потому что $\forall k \neq 1 : A_k \cap B_k = \emptyset$, а $\forall x \in A_1 = B_1 = C : x \in A \wedge x \in B$. □

Решение упражнения 4.F; Гумерова Лэйла. • Пусть дана σ -алгебра, покажем, что она замкнута относительно счётного пересечения. Это следует из того, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$, где A — единица, а значит, это просто взятие дополнения, а алгебра замкнута относительно дополнения и счётного объединения.

• Аналогично δ -алгебра замкнута относительно счётного объединения. Это следует из того, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$, где A — единица, а значит, это просто взятие дополнения, а алгебра замкнута относительно дополнения и счётного пересечения.

Покажем, что аналогичные кольца не одно и то же. Рассмотрим множество всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$. Оно замкнуто относительно симметрической разности — ибо итоговое множество содержит элементов не больше, чем сумма мощностей двух исходных, и счётного пересечения, потому что при пересечении мощность множества не увеличивается. Но оно не замкнуто относительно счётных объединений, потому что $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\} = \mathbb{N}$ — не конечно, значит это δ -кольцо, но не σ -кольцо. □

Решение упражнения 4.G; Гумерова Лэйла. Проверим, что пересечение произвольного семейства σ -колец есть σ -кольцо. Очевидно, что свойство замкнутости относительно симметрической разности и пересечения сохраняется, потому что если изначально оба множества лежали в каждом, и результат операции тоже лежал в каждом кольце, то и в пересечении все три множества тоже будут лежать. Надо проверить сохранение счётного объединения. Но тут то же самое: если каждое из исходных множеств лежало в каждом кольце, то в каждом кольце лежал результат счётного объединения, значит, в пересечении он тоже лежит.

Учитывая, что если единица лежит в каждом множестве, то лежит и в пересечении, мы получаем, что пересечение произвольного семейства σ -алгебр есть σ -алгебра.

Теперь рассмотрим множество всех возможных σ -колец/алгебр, содержащих исходную систему, и возьмём их пересечение. Полученное множество будет наименьшим, в силу того, что его можно будет пересечь, если будет что-то меньшее, содержащее исходную систему, так как каждое исходное её содержит, значит мы нашли искомое. $\square$

Решение упражнения 4.H; Гумерова Лэйла. Покажем, как породить любое открытое множество U . Рассмотрим все $q \in \mathbb{Q}$. Пройдёмся по тем, что лежат в U . Так как U — открытое, то $\forall q \in \mathbb{Q}, q \in U \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 : (q - \varepsilon_1; q + \varepsilon_2) \subset U$, причём эти $\varepsilon_{1,2}$ берём максимальными. Объединим такие интервалы; каждый из них лежит в алгебре, порождённой интервалами, их счётно, так что полученное множество лежит тоже в порождённой σ -алгебре. Покажем, что получилось именно U . Ясное дело, что объединённые интервалы лежат в U в силу выбора ε . Пусть $\exists t \in U$, не попавшее в множество. Оно не может быть рациональным, иначе мы бы его рассмотрели как попавшее в U и взяли бы интервал с ним, значит оно иррационально, но оно входит в U с какой-то окрестностью, а множество $\mathbb{Q}$ всюду плотно, так что в этой окрестности лежит какое-то рациональное, которое мы брали с максимальной окрестностью, значит, t тоже в ней, иначе окрестность можно было бы расширить. Так как мы породили все открытые множества, то можем породить некоторое надмножество борелевской σ -алгебры. Но так как система интервалов является подмножеством открытых множеств, то таким образом мы породили подмножество борелевской σ -алгебры, а значит, и её саму. $\square$

Решение упражнения 5.A; Гумерова Лэйла. Рассмотрим произвольные множества $A, B \in S$, $A \subset B$. По определению полукольца, $\exists n, C_1 \dots C_n : B \setminus A = \bigsqcup_{k=1}^n C_k$. Тогда

$$m(B) = m\left(A \sqcup \bigsqcup_{k=1}^n C_k\right) = m(A) + \sum_{k=1}^n m(C_k) \geq m(A),$$

так как мера каждого из C_k неотрицательна. $\square$

Решение упражнения 6.A; Гумерова Лэйла. Рассмотрим произвольные множества $A, B \in 2^\Omega$, $A \subset B$. Любое подходящее (счётное или конечное, в зависимости от меры) покрытие множества B элементами полукольца S автоматически является и подходящим покрытием для A , в силу того, что A — подмножество B . Значит, так как внешние меры — это инфимумы по покрытиям, то внешняя мера B будет не меньше, чем внешняя мера A , так как там могли только добавиться новые покрытия с меньшей суммой мер. $\square$

Решение упражнения 6.B; Гумерова Лэйла. Покажем для двух множеств, тогда для любого конечного будет следовать по индукции. Рассмотрим $A, B \subset \Omega$. Надо показать, что $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Положим оба слагаемых конечными, иначе неравенство тривиально. Докажем для меры Лебега, для меры Жордана доказательство будет аналогичным, за исключением того, что взятые покрытия будут конечными, а не счётными. По определению меры Лебега: $\forall \varepsilon > 0 \exists A_1, A_2 \dots; B_1, B_2 \dots \in S : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k; B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, такие что $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) < \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}$; $\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) < \mu^*(B) + \frac{\varepsilon}{2}$, в силу определения инфимума.

Заметим, что $C_n = \begin{cases} a_{\frac{n+1}{2}}, & 2 \nmid n, \\ b_{\frac{n}{2}}, & 2 \mid n. \end{cases}$ — это покрытие объединения $A \cup B$, $\forall k : C_k \in S$. Тогда

$$\mu^*(A \cup B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) + \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) < \mu^*(A) + \mu^*(B) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$. $\square$

Решение упражнения 7.D; Гумерова Лэйла. Рассмотрим $A \subset \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\lambda^*(A + h) = \lambda^*(A)$. Любое счётное покрытие A полуинтервалами I_k даёт покрытие $A + h$ сдвинутыми полуинтервалами $I_k + h$, при этом, очевидно, что $m(I_k + h) = m(I_k)$, откуда мы получаем: $\mu^*(A + h) \leq \mu^*(A)$. Но в силу того, что мы можем сделать обратный сдвиг на $-h$, мы получаем и обратное неравенство, а значит, показали равенство.

Рассмотрим A — измеримое по Лебегу: $\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \in R(S) : \mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$. При сдвиге $A_\varepsilon + h$ остаётся полуинтервалом, а значит, и в $R(S)$. Отсюда $(A + h) \Delta (A_\varepsilon + h) = (A \Delta A_\varepsilon) + h$. Тогда $\mu^*((A + h) \Delta (A_\varepsilon + h)) = \mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$. Значит, по определению, $A + h$ — измеримо.

В итоге, $\lambda(A + h) = \mu^*(A + h) = \mu^*(A) = \lambda(A)$. $\square$

Решение упражнения 7.A; Гумерова Лэйла. Выполнено $F(b) - F(a) = \mu_F(a, b] = \mu_G(a, b] = G(b) - G(a) \forall a < b$. Зафиксируем a : $F(a) = c_1$; $G(a) = c_2$, тогда получим $F(b) - c_1 = F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = G(b) - c_2 \forall b$. Тогда $F(b) - G(b) = c_2 - c_1 = \text{const}$. $\square$

Решение упражнения 7.C; Гумерова Лэйла. $\bullet x \leq y \Rightarrow (-\infty, x] \subset (-\infty, y]$, поэтому по монотонности меры μ : $F(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y]) = F(y)$ — то есть, F монотонна.

$\bullet$ В силу конечности меры μ , $\forall x : 0 \leq F(x) \leq \mu(\mathbb{R}) < +\infty - F$ ограничена.

$\bullet$ Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$ и рассмотрим убывающую x_n , сходящуюся к x . Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n] = (-\infty, x]$.

Так как все множества имеют конечную меру, то в силу непрерывности меры сверху: $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu((-\infty, x_n]) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]\right) = \mu((-\infty, x]) = F(x)$, что доказывает непрерывность справа.

$\bullet$ По построению меры Лебега–Стилтьеса: $\mu_F((-\infty, x]) = F(x) = \mu((-\infty, x])$. Меры, совпадающие на лучах, совпадают и на всей борелевской σ -алгебре, в силу теоремы о единственности продолжения. $\square$

Решение упражнения 8.A; Мелешко Екатерина. Обозначим данные измеримые функции через

$f: (X, \sigma_X) \rightarrow (Y, \sigma_Y)$ и $g: (Y, \sigma_Y) \rightarrow (Z, \sigma_Z)$. Нам необходимо доказать, что функция

$$h = g \circ f: X \rightarrow Z$$

является $\sigma_X | \sigma_Z$ -измеримой. По определению измеримости это означает, что для любого множества $C \in \sigma_Z$ его прообраз $h^{-1}(C)$ должен принадлежать σ_X .

Рассмотрим произвольное $C \in \sigma_Z$. Так как g является $\sigma_Y | \sigma_Z$ -измеримой, то прообраз $B = g^{-1}(C)$ принадлежит σ_Y . Далее, так как f является $\sigma_X | \sigma_Y$ -измеримой и $B \in \sigma_Y$, то прообраз $A = f^{-1}(B)$ лежит в σ_X . Таким образом, верна следующая цепочка равенств:

$$h^{-1}(C) = (g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) = f^{-1}(B) = A.$$

Значит, $h^{-1}(C) \in \sigma_X$, что доказывает измеримость композиции $g \circ f$. $\square$

Решение упражнения 8.B; Мелешко Екатерина. Заметим, что эти утверждения непосредственно следуют из упражнения 8.A.

1. Пусть $f: (X, \sigma_X) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ — измеримая (измеримая по Лебегу или относительно произвольной σ_X), а $g: (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ — борелевская. Тогда, согласно упражнению выше, композиция $g \circ f$ является $\sigma_X | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой, то есть просто измеримой функцией.

2. Пусть $f: (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ и $g: (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ — борелевские. По аналогичным причинам композиция $g \circ f$ является $\mathcal{B}(\mathbb{R})|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой, то есть борелевской. $\square$

Решение упражнения 8.С; Мелешко Екатерина. Заметим, что

$$\left\{x \in X : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right\} = \left\{x \in X : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right\} = \left\{x \in X : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0\right\}.$$

Так как $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ измеримы по утверждению 8.4, их разность также является измеримой функцией, а прообраз точки $\{0\}$ при отображении измеримой функцией измерим. $\square$

Замечание: другое решение упражнения 8.С предполагает использование эквивалентности существования предела и фундаментальности.

ТЕОРИМИНИМУМ

Мы все учились понемногу

Наше всё

На экзамене в первую очередь нужно продемонстрировать не бездумную зубрёжку, а понимание курса. Например, понимание определения означает умение приводить примеры объектов, удовлетворяющих ему, и (в простых случаях) контрпримеры, не подходящие под определение. Понимание формулировки теоремы означает, что вы умеете приводить к ней контрпримеры в случае нарушения некоторых её посылок. Данный текст призван не напугать, а указать, что понимается под удовлетворительным знанием курса.

Незнание (в смысле вышесказанного) следующих определений и формулировок является достаточным условием для выставления неудовлетворительной оценки.

Проверь себя !

- Дискретное вероятностное пространство
- Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Формула умножения вероятностей
- Независимость событий попарная и в совокупности. Схема испытаний Бернулли
- Дискретные случайные величины. Примеры распределений
- Теорема Пуассона
- Математическое ожидание, дисперсия, ковариация, корреляция
- Связь независимости и некоррелированности
- Закон больших чисел в форме Чебышёва
- Полукольцо, полуалгебра, кольцо, алгебра, σ -алгебра
- Борелевская σ -алгебра прямой и пространства
- Мера на системе множеств. Понятие σ -аддитивной меры
- Внешняя мера Лебега
- Измеримые множества. Мера Лебега
- Мера Лебега—Стилтьеса
- Понятие σ -конечной меры. Мера Бореля
- Классические меры Лебега и Бореля
- Измеримые функции. Борелевские функции. Борелевость непрерывных функций. Измеримость композиции измеримых функций
- Сходимости почти всюду и по мере
- Интеграл Лебега от простой функции. Заряд (мера со знаком)
- Интеграл Лебега от измеримой функции. Неопределённый интеграл Лебега
- Интегральное свойство измеримых функций
- Теорема Лебега о мажорируемой сходимости
- Прямое произведение мер. Теорема Фубини
- Теорема Радона—Никодима

— It's not possible.
— No, it's necessary.
Interstellar

1. Дискретное вероятностное пространство. Классическая модель
2. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Формула умножения вероятностей
3. Независимость событий попарная и в совокупности. Схема испытаний Бернулли
4. Дискретные случайные величины. Распределение дискретной случайной величины. Распределение Бернулли. Биномиальное распределение. Геометрическое распределение. Теорема Пуассона. Независимые случайные величины. Критерий независимости
5. Математическое ожидание. Основные свойства. Примеры вычисления для распределений из курса
6. Дисперсия. Формула для расчёта. Основные свойства. Примеры вычисления для распределений из курса
7. Ковариация. Формула для расчёта. Основные свойства. Аддитивность дисперсии для некоррелированных величин. Связь независимости и некоррелированности
8. Корреляция. Неравенство Коши—Буняковского—Шварца. Матрица ковариаций, её симметричность и неотрицательная полуопределённость. Связь положительной определённости матрицы ковариаций и линейной зависимости компонент случайного вектора
9. Неравенства Маркова и Чебышёва. Закон Больших Чисел в форме Чебышёва. Центральная Предельная Теорема (в форме теоремы Александрова; б/д)
10. Полукольцо. Полуалгебра. Кольцо. Связь полуколец и колец. Алгебра. Существование наименьшего кольца/алгебры над системой множеств. Эквивалентное определение полукольца. Вид минимального кольца над полукольцом. Утверждение «об общих кирпичах»
11. Понятия σ - и δ -колец и алгебр. Связь между ними. Борелевская σ -алгебра прямой и пространства
12. Мера на системе множеств. Понятие σ -аддитивной меры. Субаддитивность и супераддитивность меры на полукольце. Счётная супераддитивность меры на полукольце. Связь счётной субаддитивности и σ -аддитивности меры на полукольце
13. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Наследование σ -аддитивности
14. Непрерывность меры сверху и снизу. Связь непрерывности и σ -аддитивности меры на полукольце и на кольце
15. Внешние меры Жордана и Лебега, построенные по σ -аддитивной мере на полуалгебре. Их совпадение на минимальном кольце с продолженной мерой. Счётная субаддитивность внешней меры Лебега
16. Измеримые множества. Мера Лебега. Неравенство о смысле измеримости. Алгебра измеримых множеств. Аддитивность меры Лебега. Свойство σ -аддитивности меры Лебега на σ -алгебре измеримых множеств.
17. Мера Лебега—Стилтьеса и её σ -аддитивность
18. Построение σ -конечной меры и её независимость от разбиения единицы. Связь непрерывности и σ -аддитивности σ -конечной меры на σ -алгебре. Теорема Каратеодори о продолжении меры. Теорема о структуре измеримых множеств. Мера Бореля
19. Классическая мера Лебега, её σ -аддитивность. Классическая мера Бореля. Полнота меры Лебега. Построение неизмеримого подмножества в множестве положительной классической меры Лебега
20. Измеримая функция. Критерий измеримости. Борелевские функции. Борелевость непрерывных функций. Измеримость композиции измеримых функций
21. Измеримые функции со значениями на прямой. Сумма и произведение измеримых функций. Наследование измеримости для супремума, инфимума, верхнего и нижнего пределов

22. Существование простых функций, сходящихся поточечно к измеримой. Существование борелевской функции, равной почти всюду измеримой
23. Множество Кантора и его свойства. Лестница Кантора и её свойства. Неполнота классической меры Бореля Построение измеримой и борелевской функций, чья композиция неизмерима
24. Сходимости почти всюду и по мере. Единственность пределов почти всюду и по мере. Критерий сходимости почти всюду на пространстве конечной меры. Связь сходимостей почти всюду и по мере. Контрпример Рисса. Теорема Рисса
25. Почти равномерная сходимость и её связь со сходимостями почти всюду и по мере. Единственность почти равномерного предела. Теорема Егорова. Критерии Коши сходимостей почти всюду, почти равномерной, и по мере
26. Наследование сходимостей почти всюду и по мере при сложении. Критерий сходимости по мере на пространстве конечной меры. Теорема о наследовании сходимостей почти всюду и по мере при непрерывном отображении. Образ меры при отображении (распределение)
27. Интеграл Лебега от простой функции. Основные свойства.
28. Заряд (конечная σ -аддитивная мера со знаком), его непрерывность сверху и снизу. Абсолютная непрерывность. Неопределённый интеграл Лебега. Его связь с зарядами
29. Предел неопределённых интегралов фундаментальных в среднем простых функций, его конечность и σ -аддитивность. Равностепенная абсолютная непрерывность неопределённых интегралов фундаментальных в среднем простых функций
30. Интеграл Лебега от измеримой функции. Основные свойства. Неопределённый интеграл Лебега. Его конечность, абсолютная непрерывность и σ -аддитивность
31. Неравенство Чебышёва (интегральное). Связь сходимости по мере и в среднем. Свойство σ -конечности множества, на котором интегрируемая функция принимает ненулевое значение. Интегральное свойство измеримых функций
32. (б/д) Связь интегрируемости по Риману в собственном смысле и по Лебегу. Связь интегрируемости по Риману в несобственном смысле и по Лебегу
33. Критерий Коши сходимости в среднем. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Следствия из неё. Теорема Леви о монотонной сходимости, следствие для рядов. Эквивалентное определение интеграла через супремум простых. Лемма Фату о нижнем пределе
34. Прямое произведение мер. Лемма о монотонных классах. Утверждения о связи меры и интеграла, мера подграфика. Формула интегрирования по частям. Ассоциативность произведения σ -алгебр и мер (б/д). Теорема Фубини. Теорема Тонелли
35. Разложение Хана. Разложение Жордана. Теорема Радона—Никодима. Абсолютная непрерывность функций на прямой. Формула Ньютона—Лейбница (б/д). Разложение Лебега. Вариация заряда, полная вариация
36. Общее понятие вероятностного пространства, случайной величины, случайного вектора, распределения, математического ожидания, независимости случайных векторов

tg: sdjenjer