

ПРОГРАММА КУРСА

— It's not possible.
— No, it's necessary.
Interstellar

1. Дискретное вероятностное пространство. Классическая модель
2. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Формула умножения вероятностей
3. Независимость событий попарная и в совокупности. Схема испытаний Бернулли
4. Дискретные случайные величины. Распределение дискретной случайной величины. Распределение Бернулли. Биномиальное распределение. Геометрическое распределение. Теорема Пуассона. Независимые случайные величины. Критерий независимости
5. Математическое ожидание. Основные свойства. Примеры вычисления для распределений из курса
6. Дисперсия. Формула для расчёта. Основные свойства. Примеры вычисления для распределений из курса
7. Ковариация. Формула для расчёта. Основные свойства. Аддитивность дисперсии для некоррелированных величин. Связь независимости и некоррелированности
8. Корреляция. Неравенство Коши—Буняковского—Шварца. Матрица ковариаций, её симметричность и неотрицательная полуопределённость. Связь положительной определённости матрицы ковариаций и линейной зависимости компонент случайного вектора
9. Неравенства Маркова и Чебышёва. Закон Больших Чисел в форме Чебышёва. Центральная Предельная Теорема (в форме теоремы Александрова; б/д)
10. Полукольцо. Полуалгебра. Кольцо. Связь полуколец и колец. Алгебра. Существование наименьшего кольца/алгебры над системой множеств. Эквивалентное определение полукольца. Вид минимального кольца над полукольцом. Утверждение «об общих кирпичах»
11. Понятия σ - и δ -колец и алгебр. Связь между ними. Борелевская σ -алгебра прямой и пространства
12. Мера на системе множеств. Понятие σ -аддитивной меры. Субаддитивность и супераддитивность меры на полукольце. Счётная супераддитивность меры на полукольце. Связь счётной субаддитивности и σ -аддитивности меры на полукольце
13. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Наследование σ -аддитивности
14. Непрерывность меры сверху и снизу. Связь непрерывности и σ -аддитивности меры на полукольце и на кольце
15. Внешние меры Жордана и Лебега, построенные по σ -аддитивной мере на полуалгебре. Их совпадение на минимальном кольце с продолженной мерой. Счётная субаддитивность внешней меры Лебега
16. Измеримые множества. Мера Лебега. Неравенство о смысле измеримости. Алгебра измеримых множеств. Аддитивность меры Лебега. Свойство σ -аддитивности меры Лебега на σ -алгебре измеримых множеств.
17. Мера Лебега—Стилтьеса и её σ -аддитивность
18. Построение σ -конечной меры и её независимость от разбиения единицы. Связь непрерывности и σ -аддитивности σ -конечной меры на σ -алгебре. Теорема Каратеодори о продолжении меры. Теорема о структуре измеримых множеств. Мера Бореля
19. Классическая мера Лебега, её σ -аддитивность. Классическая мера Бореля. Полнота меры Лебега. Построение неизмеримого подмножества в множестве положительной классической меры Лебега
20. Измеримая функция. Критерий измеримости. Борелевские функции. Борелевость непрерывных функций. Измеримость композиции измеримых функций
21. Измеримые функции со значениями на прямой. Сумма и произведение измеримых функций. Наследование измеримости для супремума, инфимума, верхнего и нижнего пределов

22. Существование простых функций, сходящихся поточечно к измеримой. Существование борелевской функции, равной почти всюду измеримой
23. Множество Кантора и его свойства. Лестница Кантора и её свойства. Неполнота классической меры Бореля Построение измеримой и борелевской функций, чья композиция неизмерима
24. Сходимости почти всюду и по мере. Единственность пределов почти всюду и по мере. Критерий сходимости почти всюду на пространстве конечной меры. Связь сходимостей почти всюду и по мере. Контрпример Рисса. Теорема Рисса
25. Почти равномерная сходимость и её связь со сходимостями почти всюду и по мере. Единственность почти равномерного предела. Теорема Егорова. Критерии Коши сходимостей почти всюду, почти равномерной, и по мере
26. Наследование сходимостей почти всюду и по мере при сложении. Критерий сходимости по мере на пространстве конечной меры. Теорема о наследовании сходимостей почти всюду и по мере при непрерывном отображении. Образ меры при отображении (распределение)
27. Интеграл Лебега от простой функции. Основные свойства.
28. Заряд (конечная σ -аддитивная мера со знаком), его непрерывность сверху и снизу. Абсолютная непрерывность. Неопределённый интеграл Лебега. Его связь с зарядами
29. Предел неопределённых интегралов фундаментальных в среднем простых функций, его конечность и σ -аддитивность. Равностепенная абсолютная непрерывность неопределённых интегралов фундаментальных в среднем простых функций
30. Интеграл Лебега от измеримой функции. Основные свойства. Неопределённый интеграл Лебега. Его конечность, абсолютная непрерывность и σ -аддитивность
31. Неравенство Чебышёва (интегральное). Связь сходимости по мере и в среднем. Свойство σ -конечности множества, на котором интегрируемая функция принимает ненулевое значение. Интегральное свойство измеримых функций
32. (б/д) Связь интегрируемости по Риману в собственном смысле и по Лебегу. Связь интегрируемости по Риману в несобственном смысле и по Лебегу
33. Критерий Коши сходимости в среднем. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Следствия из неё. Теорема Леви о монотонной сходимости, следствие для рядов. Эквивалентное определение интеграла через супремум простых. Лемма Фату о нижнем пределе
34. Прямое произведение мер. Лемма о монотонных классах. Утверждения о связи меры и интеграла, мера подграфика. Формула интегрирования по частям. Ассоциативность произведения σ -алгебр и мер (б/д). Теорема Фубини. Теорема Тонелли
35. Разложение Хана. Разложение Жордана. Теорема Радона—Никодима. Абсолютная непрерывность функций на прямой. Формула Ньютона—Лейбница (б/д). Разложение Лебега. Вариация заряда, полная вариация
36. Общее понятие вероятностного пространства, случайной величины, случайного вектора, распределения, математического ожидания, независимости случайных векторов

tg: sdjenjer