

Программа курса „Математическая статистика“

лектор — доц. Савёлов М.П.

Осень 2025

1. Виды сходимостей случайных векторов и связи между ними. Связь между сходимостью векторов и сходимостью их компонент. Теорема о наследовании сходимости.
2. Закон больших чисел, усиленный закон больших чисел и многомерная центральная предельная теорема для случайных векторов (б/д). Лемма Слуцкого. Пример применения леммы Слуцкого и его обобщение на многомерный случай (доказательство для одномерного случая).
3. Вероятностно–статистическая модель. Понятия наблюдения и выборки. Моделирование выборки из неизвестного распределения. Основная задача математической статистики. Параметрическая статистическая модель.
4. Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко–Кантелли.
5. Статистики и оценки. Примеры статистик: выборочные характеристики, порядковые статистики. Основные свойства оценок (несмещенность, состоятельность, сильная состоятельность, асимптотическая нормальность) и взаимосвязи между ними.
6. Наследование состоятельности и сильной состоятельности при взятии непрерывной функции. Лемма о наследовании асимптотической нормальности.
7. Метод подстановки и метод моментов, их связь. Состоятельность и асимптотическая нормальность оценки метода моментов.
8. Квантили и выборочные квантили. Теорема об асимптотической нормальности выборочной квантили. Теорема о выборочной медиане (б/д).
9. Сравнение оценок, функция потерь и функция риска. Подходы к сравнению оценок: равномерный, байесовский, минимаксный, асимптотический.
10. Понятие плотности в дискретном случае. Неравенство Рао–Крамера и эффективные оценки. Критерий эффективности оценки.
11. Экспоненциальные семейства распределений. Их связь с условием существования эффективной оценки.

12. Достаточные статистики. Критерий факторизации Неймана–Фишера (доказательство для дискретного случая). Теорема Колмогорова–Блекуэлл–Рао об улучшении несмещенной оценки.
13. Полные статистики. Теорема Лемана–Шеффе об оптимальной оценке. Теорема о полной достаточной статистике в экспоненциальном семействе (б/д). Нахождение оптимальных оценок с помощью полных достаточных статистик.
14. Доверительные интервалы. Метод центральной статистики. Асимптотические доверительные интервалы. Построение асимптотических доверительных интервалов с помощью асимптотически нормальных оценок.
15. Метод максимального правдоподобия. Экстремальное свойство функции правдоподобия. Состоятельность оценки максимального правдоподобия.
16. Асимптотическая нормальность оценки максимального правдоподобия в регулярном случае для одномерного параметра (б/д). Теорема Бахадура (б/д). Асимптотическая эффективность оценки максимального правдоподобия. Условия, при которых эффективная оценка параметра является оценкой максимального правдоподобия.
17. Линейная регрессионная модель. Оценка наименьших квадратов, ее основные свойства. Теорема о наилучшей оценке в классе линейных оценок (б/д). Несмещенная оценка для дисперсии ошибки измерений σ^2 .
18. Гауссовская линейная модель. Достаточные статистики в гауссовской линейной модели. Наилучшие несмещенные оценки параметров в гауссовской линейной модели, их распределения.
19. Распределения хи-квадрат, Стьюдента и Фишера, их свойства. Теорема об ортогональном разложении гауссовского вектора (б/д). Доверительные интервалы для параметров гауссовской линейной модели.
20. Проверка статистических гипотез: общие принципы и основные понятия (критическое множество, уровень значимости, альтернативы, ошибки первого и второго рода, функция мощности). Наиболее мощные и равномерно наиболее мощные критерии. Несмещенность и состоятельность статистического критерия.
21. Лемма Неймана–Пирсона. Построение с ее помощью наиболее мощных критериев. Теорема о монотонном отношении правдоподобия (б/д). Построение равномерно наиболее мощных критериев для односторонних альтернатив. Двойственность доверительного оценивания и проверки гипотез.
22. F -критерий для проверки линейных гипотез в гауссовской линейной модели. Пример с двумя гауссовскими выборками, отличающимися сдвигом: проверка гипотезы об их однородности.
23. Критерий хи-квадрат Пирсона. Теорема Пирсона (формулировка). Состоятельность критерия хи-квадрат. Критерий Колмогорова. Критерий фон Мизеса–Смирнова.

24. Доказательство теоремы Пирсона.
25. Байесовские оценки. Теорема о наилучшей оценке в байесовском подходе.
26. Коэффициенты корреляции Пирсона и Спирмена. Их свойства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровков А.А.* Математическая статистика. — 3-е изд. — М.: Физматлит, 2007, 704 с.
2. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Математическая статистика. — М.: Высш.шк., 1984, 248 с.
3. *Тюрин Ю.Н.* Математическая статистика. Записки лекций. — М.: изд-во ЦПИ механико-математического факультета МГУ, 2003, 192 с.
4. *Лагутин М.Б.* Наглядная математическая статистика. — 2-е изд. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.
5. *Бикел П., Доксам К.* Математическая статистика (выпуск 1). — М.: «Финансы и статистика», 1983, 278 с.
6. *Леман Э.* Теория точечного оценивания. — М.: Физматлит, 1991, 448 с.