Seminar 10: Критерии согласия

Carlos Buitrago

Table of contents

1 1. Эмпирическая функция распределения 1

2 2. Критерий Колмогорова (K–S) 2

3 3. Критерий Крамера–фон Мизеса–Смирнова 4

4 4. Критерий χ^2 Пирсона 5

5 5. Сравнение критериев: статистическая мощность 7

6 7. Что важно запомнить 8

> **Постановка задачи**
>
> Для независимой выборки $X_1, \dots, X_n$ проверяем простую гипотезу $H_0 : F = F_0$ против $H_1 : F \neq F_0$. В критериях Колмогорова и Крамера–фон Мизеса ниже предполагается **непрерывная и полностью заданная** F_0. Если параметры оценены по тем же данным, стандартные критические значения в общем случае изменяются.

1 1. Эмпирическая функция распределения

> **Определение 1**
>
> Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка из распределения с функцией распределения $F(x)$. **Эмпирическая функция распределения** определяется формулой
>
> $$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_i \leq x\}.$$
>
> Это доля наблюдений, не превосходящих x.

Свойства: $\widehat{F}_n$ не убывает, непрерывна справа, принимает значения от 0 до 1 и имеет скачки в наблюдаемых точках.

> **Теорема Гливенко–Кантелли**
>
> Для независимых одинаково распределённых наблюдений
>
> $$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\widehat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0, \qquad n \to \infty.$$

То есть эмпирическая функция распределения **равномерно** приближается к истинной.



2 2. Критерий Колмогорова (K–S)

Для упорядоченной выборки $X_{(1)} \le \ldots \le X_{(n)}$:

$$D_n = \sup_x |\widehat{F}_n(x) - F_0(x)| = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{i}{n} - F_0(X_{(i)}),\ F_0(X_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right\}.$$

Теорема Колмогорова

При верной H_0 и непрерывной F_0:

$$\sqrt{n} D_n \xrightarrow{d} K, \qquad \mathbb{P}(K \le t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 t^2}, \quad t > 0.$$

Обозначим через $k_{1-\alpha}$ квантиль порядка $1 - \alpha$ распределения K. **Асимптотический критерий:** отвергнуть H_0, если

$$\sqrt{n} D_n \ge k_{1-\alpha}.$$

В исходном конспекте рекомендовано использовать критерий при $n \ge 20$. Для полностью заданной непрерывной F_0 существуют также **точные конечновыборочные** p-значения.

Почему достаточно проверить точки скачков?

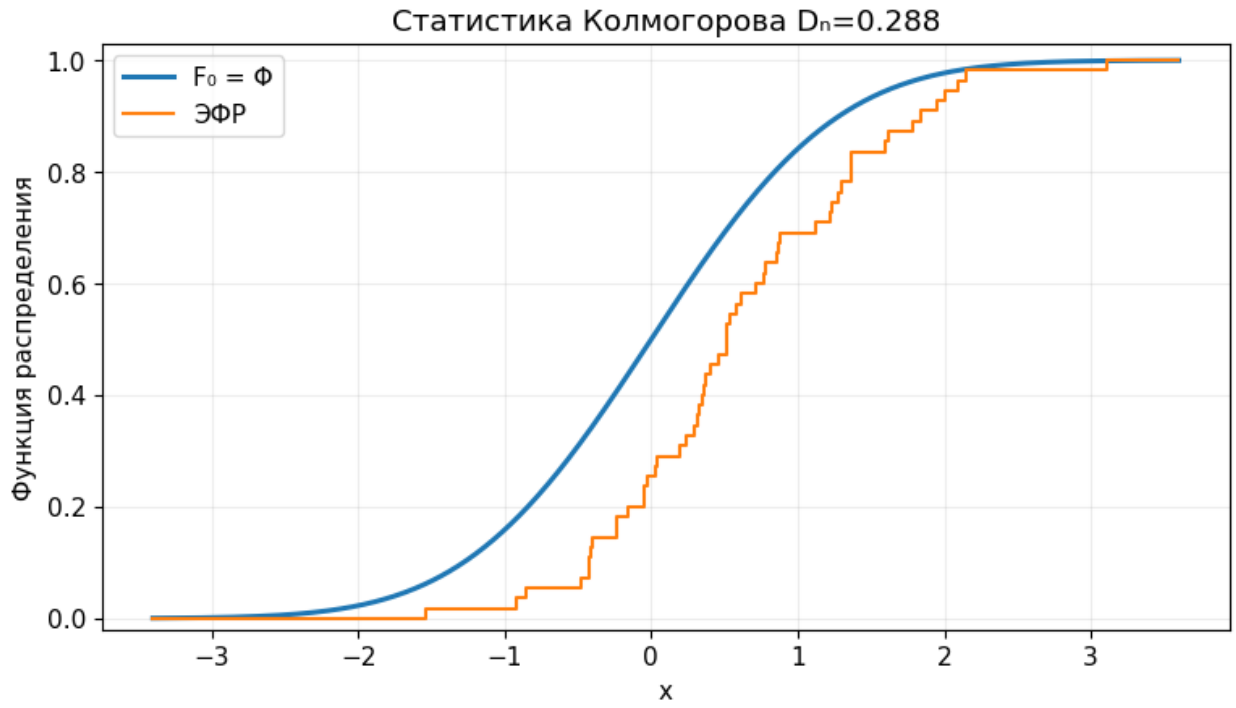
Между соседними наблюдениями $\widehat{F}_n(x)$ постоянна, а $F_0(x)$ не убывает и непрерывна. Максимум абсолютной разности на таком интервале достигается на одном из его концов (включая односторонние

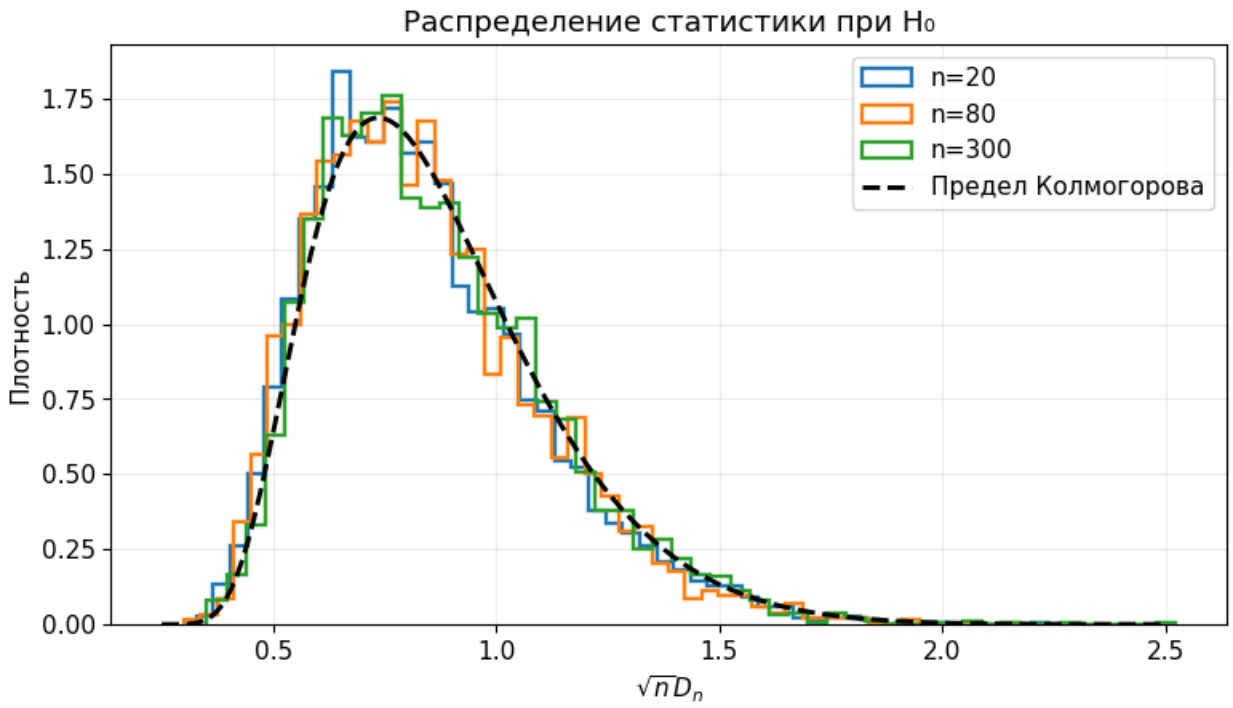
пределы). Поэтому достаточно вычислить две разности для каждого $X_{(i)}$.

! Состоятельность

Критерий Колмогорова состоятелен против любой фиксированной альтернативы $F \neq F_0$: вероятность отклонить H_0 стремится к 1.

```
D_n = 0.2882; sqrt(n) D_n = 2.1373
p-value (точный одновыборочный KS): 0.0001541981424404368
```





3 3. Критерий Крамера–фон Мизеса–Смирнова

Определение 2

Статистика омега-квадрат:

$$\omega^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\widehat{F}_n(x) - F_0(x)\right)^2 dF_0(x).$$

Для непрерывной F_0 её удобно вычислять через порядковые статистики:

$$\boxed{n\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left(F_0(X_{(i)}) - \frac{2i-1}{2n}\right)^2.}$$

Предельное распределение и критерий

При H_0 статистика $n\omega^2$ сходится по распределению к фиксированному закону P (закону Крамера–фон Мизеса). Если $y_{1-\alpha}$ — его квантиль, отклоняем H_0, когда

$$n\omega^2 > y_{1-\alpha}.$$

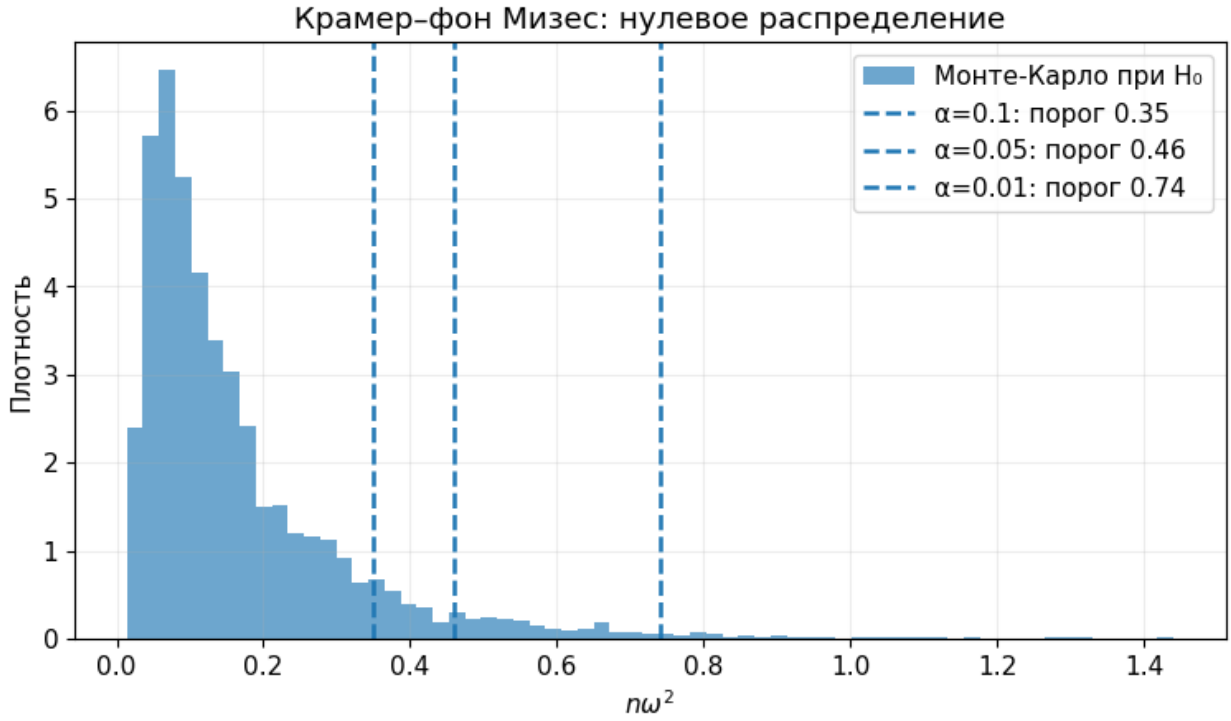
Критерий состоятелен против любой фиксированной альтернативы $F \neq F_0$.

α	0.5	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.001
$y_{1-\alpha}$	0.12	0.28	0.35	0.46	0.58	0.74	1.17

Значения из раздаточного материала округлены; при численных расчётах можно использовать реализацию в

SciPy.

```
Сдвиг=0.0: nω²=0.212, p≈0.2461
Сдвиг=0.4: nω²=1.172, p≈0.0009
Сдвиг=0.8: nω²=5.586, p≈0.0000
```



4 4. Критерий χ^2 Пирсона

Пусть $B_1, \dots, B_n$ — независимые результаты с k категориями и вероятностями $p = (p_1, \dots, p_k)$. Обозначим

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}\{B_j = i\}, \qquad (X_1, \dots, X_k) \sim \text{Multinomial}(n, p).$$

Проверяем $H_0 : p = p^0$ против $H_1 : p \neq p^0$, где все $p_i^0 > 0$.

Определение 3

Статистика хи-квадрат Пирсона:

$$\chi^2(X) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i^0)^2}{np_i^0}.$$

Теорема Карла Пирсона

При верной H_0 и фиксированном k:

$$\chi^2(X) \xrightarrow{d} \chi^2_{k-1}, \quad n \to \infty.$$

Критическая область асимптотического уровня α:

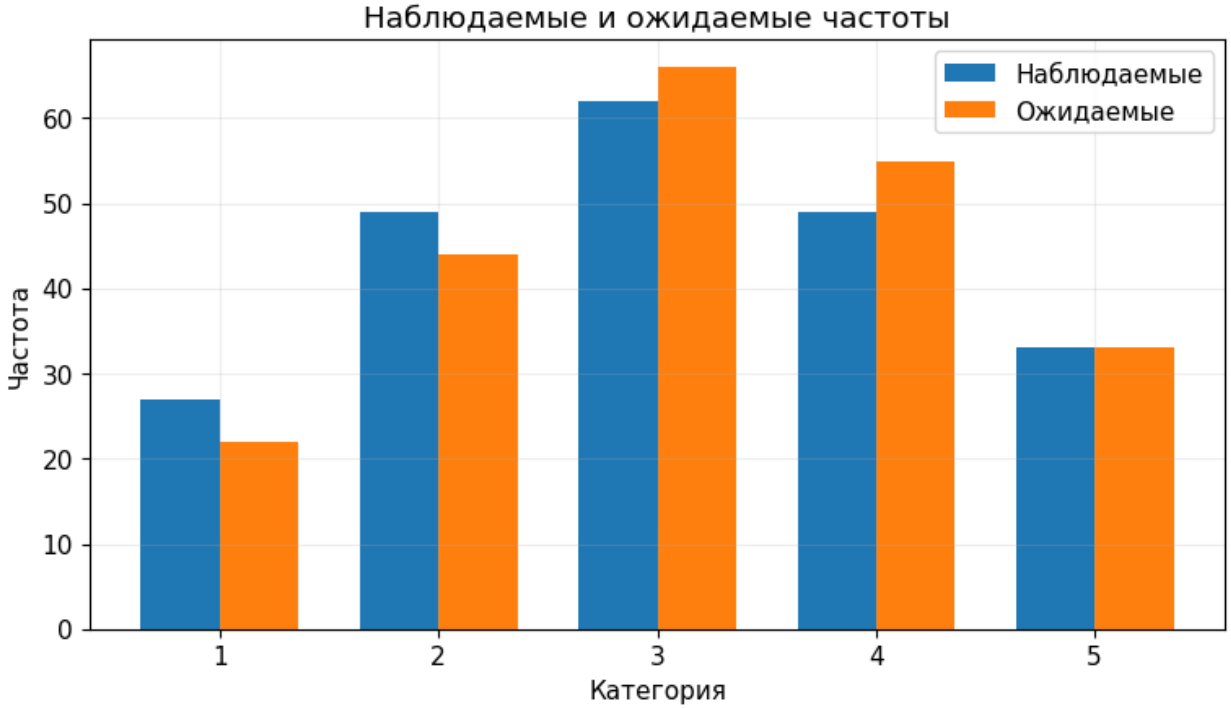
$$R = \left\{x : \chi^2(x) > \chi^2_{k-1,1-\alpha}\right\}.$$

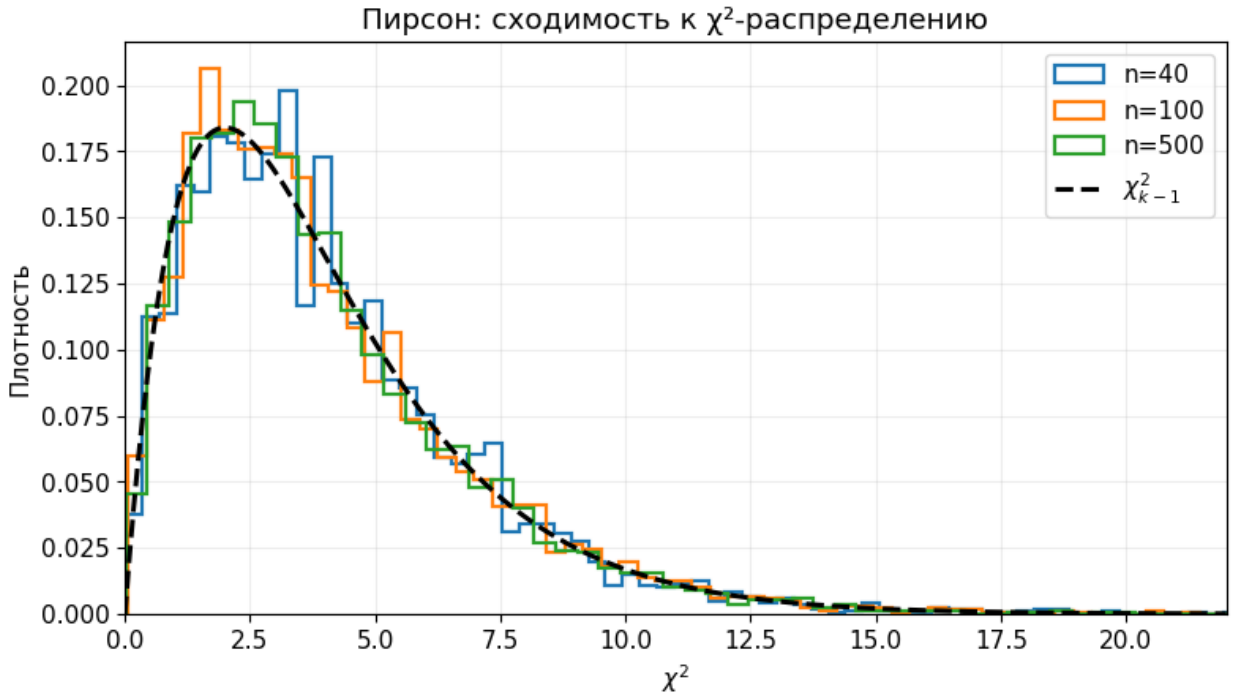
Критерий состоятелен против любой фиксированной альтернативы $p \neq p^0$.

⚠ Когда приближение применимо?

В исходном конспекте дано практическое правило: $n \geq 50$ и $np_i^0 \geq 5$ для каждой категории. Это **эвристика**, а не необходимое математическое условие. При малых ожидаемых частотах асимптотическое приближение может быть плохим.
Число степеней свободы $k-1$ относится к **полностью заданным** вероятностям p^0 без оценки параметров по выборке.

```
Наблюдения: [27 49 62 49 33] Ожидания: [22. 44. 66. 55. 33.]
χ²=2.602; p-value=0.6266
```

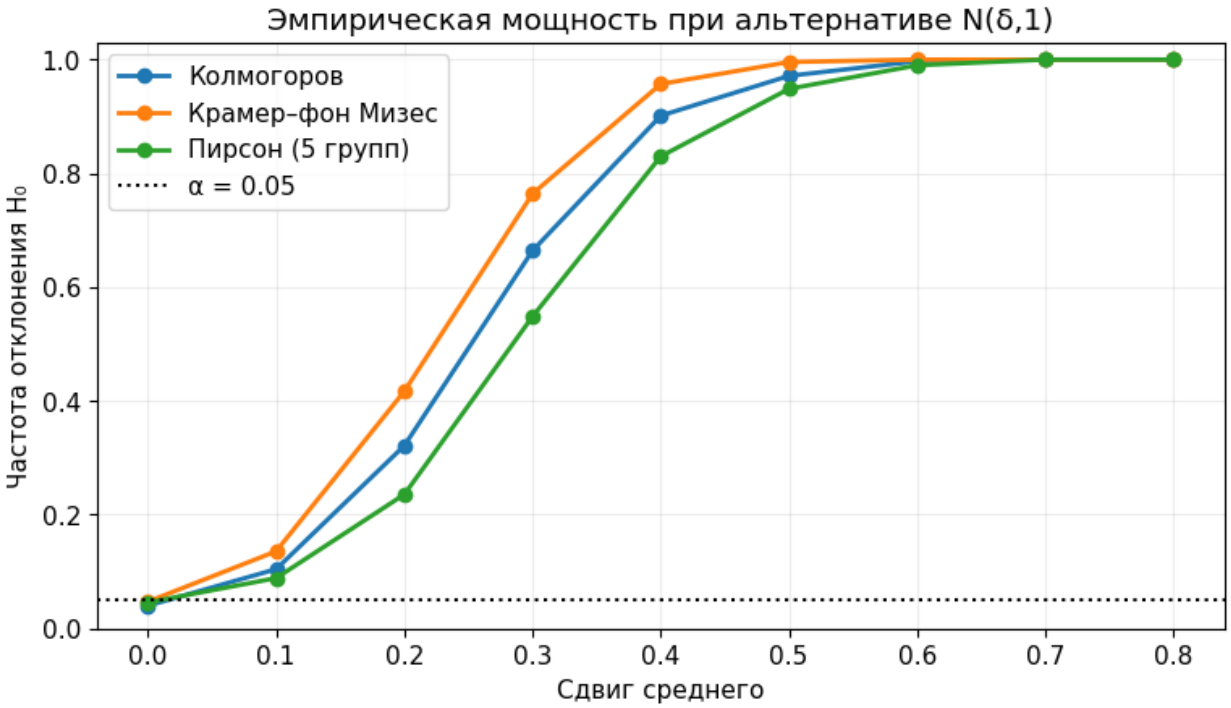




5 5. Сравнение критериев: статистическая мощность

У трёх критериев различается способ измерения несогласия: Колмогоров использует **максимальное** отклонение функций распределения, Крамер–фон Мизес — **интеграл квадрата** отклонения, Пирсон — **сумму квадратичных отклонений частот** по заранее заданным категориям.

Следующий эксперимент сравнивает частоту отклонения $H_0 : N(0,1)$ при сдвиге среднего. Для Пирсона используются пять интервалов, равновероятных при H_0. Это иллюстрация, а не универсальное ранжирование критериев.



6 7. Что важно запомнить

- **ЭФР:** $\widehat{F}_n(x) = n^{-1} \sum_i \mathbf{1}\{X_i \le x\}$.
- **Гливенко–Кантелли:** $\sup_x |\widehat{F}_n - F| \to 0$ почти наверное.
- **Колмогоров:** $D_n = \sup_x |\widehat{F}_n - F_0|$; критический масштаб $\sqrt{n}$.
- **Крамер–фон Мизес:** интегральное квадратичное отклонение; статистика $n\omega^2$.
- **Пирсон:** $\sum_i (O_i - E_i)^2 / E_i$; при заданных k вероятностях предельное распределение χ^2_{k-1}.
- **Осторожно:** классические табличные пороги требуют выполнения предположений (непрерывность, простая гипотеза, достаточно большая выборка).