

Seminar 5: Доверительные интервалы

Carlos Buitrago

Table of contents

1	Доверительные интервалы	2
2	1. Определение доверительного интервала	2
2.1	Асимптотический доверительный интервал	3
3	2. Главная идея: центральная статистика	4
4	3. Точная схема построения через pivot	4
4.1	Простейший пример	4
5	4. Асимптотические доверительные интервалы	5
6	5. Три основных способа построения асимптотического ДИ	5
6.1	Метод I. Обратить исходное асимптотическое неравенство	6
6.2	Метод II. Оценить неизвестную дисперсию	6
6.3	Метод III. Стабилизация дисперсии	6
7	6. Подробный пример: $\text{Pois}(\theta)$ тремя методами	7
7.1	Метод I: обращение неравенства	7
7.2	Метод II: подстановка оценки дисперсии	8
7.3	Метод III: стабилизация дисперсии	8
8	7. Дельта-метод для доверительных интервалов	9
9	8. Порядковые статистики и точные интервалы	9
9.1	Пример: $U(0, \theta)$ и максимум	10
10	9. Масштабные семейства	11
11	10. Монотонные преобразования	11
12	11. Распределение Коши: что делать без моментов?	12
13	12. Гамма-распределение и информация Фишера	13
13.1	Если α также неизвестно	13
14	13. Экспоненциальное распределение	14
14.1	Rate-параметризация	14
14.2	Scale-параметризация	14
15	14. Нормальная выборка: точные pivots	15
16	15. Точный доверительный интервал для дисперсии	15

17	16. Доверительные области для вектора параметров	16
18	17. CIs in inferential statistics	16
18.1	17.1. Доверительный интервал для доли	17
18.1.1	Связь с proportion z -test	17
18.2	17.2. z -интервал для среднего	17
18.3	17.3. t -интервал для среднего	18
18.4	17.4. Доверительный интервал для дисперсии	18
19	18. Интервалы на основе MLE и информации Фишера	19
20	19. Асимптотика длины интервала	19
21	20. Что нужно распознавать в задачах	20
22	21. Карта методов для задач семинара	20

1 Доверительные интервалы

В этой главе собраны основные определения, методы и результаты, необходимые для построения точных и асимптотических доверительных интервалов, в том числе для задач с порядковыми статистиками, нормальной, пуассоновской, экспоненциальной, гамма-, Парето- и Коши-моделями.

Обозначим через $\gamma \in (0, 1)$ уровень доверия, а через

$$\alpha = 1 - \gamma$$

уровень ошибки. Для центральных двусторонних интервалов обычно используется квантиль

$$z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2).$$

i Терминология

В русской литературе часто говорят **доверительный интервал уровня доверия γ** . Например, для 95%-го доверительного интервала $\gamma = 0.95$ и $\alpha = 0.05$.

2 1. Определение доверительного интервала

! Определение

Доверительным интервалом уровня доверия γ для параметра θ называется пара статистик

$$(T_1(X), T_2(X)),$$

такая, что для любого $\theta \in \Theta$

$$\mathbb{P}_\theta(T_1(X) < \theta < T_2(X)) \geq \gamma.$$

Если выполнено равенство

$$\mathbb{P}_\theta(T_1(X) < \theta < T_2(X)) = \gamma,$$

то доверительный интервал называется **точным**.

! Что означает вероятность γ ?

После наблюдения выборки границы интервала становятся фиксированными числами, а параметр θ в классической статистике считается фиксированным.

Поэтому γ характеризует **процедуру построения интервала**: если многократно повторять эксперимент и каждый раз строить интервал тем же способом, доля интервалов, содержащих истинное значение θ , будет равна (или не меньше) γ .

2.1 Асимптотический доверительный интервал

! Определение

Последовательность интервалов

$$(T_1^{(n)}(X), T_2^{(n)}(X))$$

называется **асимптотическим доверительным интервалом уровня доверия γ** , если

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\theta(T_1^{(n)}(X) < \theta < T_2^{(n)}(X)) \geq \gamma.$$

В типичных регулярных задачах вероятность покрытия сходится ровно к γ .

💡 Хороший доверительный интервал

Одного свойства покрытия недостаточно: естественно также требовать, чтобы длина интервала была как можно меньше и, при возможности,

$$T_2^{(n)} - T_1^{(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Обычно длина регулярного асимптотического интервала имеет порядок $n^{-1/2}$, однако для экстремальных статистик возможна более быстрая скорость, например n^{-1} .

3 2. Главная идея: центральная статистика

! Определение

Функция

$$G(X, \theta)$$

называется **центральной статистикой** (pivot), если её распределение не зависит от неизвестного параметра θ .

Для непосредственного обращения неравенства удобно также, чтобы при каждом фиксированном x функция $G(x, \theta)$ была непрерывной и строго монотонной по θ .

Пусть x_p — p -квантиль распределения $G(X, \theta)$ и

$$p_2 - p_1 = \gamma.$$

Тогда

$$\mathbb{P}_\theta (x_{p_1} < G(X, \theta) < x_{p_2}) = \gamma.$$

Если эти неравенства можно разрешить относительно θ , получаем точный доверительный интервал.

💡 Центральный интервал

Часто выбирают

$$p_1 = \frac{1 - \gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}, \quad p_2 = \frac{1 + \gamma}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Это особенно естественно для симметричного распределения центральной статистики.

i Центральный не обязательно означает кратчайший

Выбор равных хвостовых вероятностей удобен и стандартен, но не всегда минимизирует длину интервала. В задачах с несимметричными распределениями pivot можно распределять вероятность α между двумя хвостами иначе.

4 3. Точная схема построения через pivot

Практически алгоритм выглядит так:

1. Найти статистику $G(X, \theta)$, распределение которой известно и не зависит от θ .
2. Выбрать числа a, b так, чтобы

$$\mathbb{P}(a < G(X, \theta) < b) = \gamma.$$

3. Разрешить двойное неравенство относительно θ .
4. Полученные функции выборки и будут границами доверительного интервала.

4.1 Простейший пример

Если

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

где σ известно, то

$$\mathbb{P} \left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha/2} \right) = \gamma,$$

откуда

$$\theta \in \left(\hat{\theta} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\theta} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

5 4. Асимптотические доверительные интервалы

Пусть оценка $\hat{\theta}_n$ асимптотически нормальна:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta)).$$

Эквивалентно,

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\theta)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Если $\hat{\theta}_n$ состоятельна и $\sigma(\cdot)$ непрерывна, то по теореме Slutsky

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\hat{\theta}_n)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Отсюда получается стандартный **Wald-интервал**

$$\theta \in \left(\hat{\theta}_n - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma(\hat{\theta}_n)}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma(\hat{\theta}_n)}{\sqrt{n}} \right).$$

 Подстановка оценки в стандартную ошибку

Замена неизвестного $\sigma(\theta)$ на $\sigma(\hat{\theta}_n)$ обычно делает интервал лишь **асимптотически**, а не точно, доверительным.

6 5. Три основных способа построения асимптотического ДИ

Именно эти три подхода особенно полезно сравнивать на распределении Пуассона.

6.1 Метод I. Обратить исходное асимптотическое неравенство

Если

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)}{\sigma(\theta)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1),$$

можно оставить θ внутри знаменателя и непосредственно решить

$$-z_{1-\alpha/2} < \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)}{\sigma(\theta)} < z_{1-\alpha/2}$$

относительно θ .

Такой подход иногда приводит к нелинейному, но более естественному интервалу.

6.2 Метод II. Оценить неизвестную дисперсию

По состоятельности

$$\sigma^2(\hat{\theta}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2(\theta).$$

Тогда по Случному

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)}{\sigma(\hat{\theta})} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1),$$

что приводит к Wald-интервалу.

6.3 Метод III. Стабилизация дисперсии

Пусть

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta)).$$

Ищем монотонную функцию τ такую, что

$$\tau'(\theta)\sigma(\theta) = 1.$$

То есть можно взять

$$\tau(\theta) = \int^{\theta} \frac{du}{\sigma(u)}.$$

По дельта-методу

$$\sqrt{n}(\tau(\hat{\theta}) - \tau(\theta)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

После построения интервала для $\tau(\theta)$ выполняем обратное преобразование.

7 6. Подробный пример: $\text{Pois}(\theta)$ тремя методами

Пусть

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Pois}(\theta).$$

Тогда

$$\mathbb{E}X_i = \theta, \quad \text{Var}(X_i) = \theta,$$

а $\hat{\theta} = \bar{X}$. По ЦПТ

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta),$$

то есть

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sqrt{\theta}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Обозначим

$$z = z_{1-\alpha/2}.$$

7.1 Метод I: обращение неравенства

Начинаем с

$$-z < \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sqrt{\theta}} < z.$$

Положим $y = \sqrt{\theta} > 0$. Тогда $\theta = y^2$, и получаем

$$-z < \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - y^2)}{y} < z.$$

Решая обе квадратные границы относительно y , получаем

$$\frac{-z + \sqrt{z^2 + 4n\bar{X}}}{2\sqrt{n}} < \sqrt{\theta} < \frac{z + \sqrt{z^2 + 4n\bar{X}}}{2\sqrt{n}}.$$

Следовательно,

$$\theta \in \left(\left(\sqrt{\bar{X} + \frac{z^2}{4n}} - \frac{z}{2\sqrt{n}} \right)^2, \left(\sqrt{\bar{X} + \frac{z^2}{4n}} + \frac{z}{2\sqrt{n}} \right)^2 \right).$$

i Что произошло?

Мы **не заменяли** θ в стандартной ошибке на оценку. Вместо этого непосредственно обратили асимптотическое неравенство относительно неизвестного параметра.

7.2 Метод II: подстановка оценки дисперсии

Поскольку

$$\bar{X} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta,$$

имеем

$$\sqrt{\bar{X}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \sqrt{\theta}.$$

По теореме Слущкого

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sqrt{\bar{X}}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Поэтому

$$\theta \in \left(\bar{X} - z \sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}, \bar{X} + z \sqrt{\frac{\bar{X}}{n}} \right).$$

⚠ Недостаток Wald-интервала

Нижняя граница может оказаться отрицательной, хотя $\theta > 0$. Это типичная проблема Wald-интервалов около границы пространства параметров.

7.3 Метод III: стабилизация дисперсии

Здесь

$$\sigma^2(\theta) = \theta, \quad \sigma(\theta) = \sqrt{\theta}.$$

Ищем τ из условия

$$\tau'(\theta) \sqrt{\theta} = 1.$$

Поэтому

$$\tau'(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\theta}}, \quad \tau(\theta) = 2\sqrt{\theta}.$$

По дельта-методу

$$\sqrt{n} \left(2\sqrt{\bar{X}} - 2\sqrt{\theta} \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Следовательно,

$$-z < 2\sqrt{n}(\sqrt{\bar{X}} - \sqrt{\theta}) < z$$

с асимптотической вероятностью γ . Значит,

$$\theta \in \left(\left(\sqrt{\bar{X}} - \frac{z}{2\sqrt{n}} \right)^2, \left(\sqrt{\bar{X}} + \frac{z}{2\sqrt{n}} \right)^2 \right),$$

если преобразованные границы остаются в допустимой области.

💡 Сравнение трёх методов

Все три интервала имеют одно и то же асимптотическое покрытие первого порядка, но при конечном n их границы различаются.

- **Метод I:** обращаем исходную нормальную аппроксимацию.
- **Метод II:** подставляем оценку в стандартную ошибку — классический Wald.
- **Метод III:** сначала преобразуем параметр так, чтобы асимптотическая дисперсия стала постоянной.

8 7. Дельта-метод для доверительных интервалов

! Дельта-метод

Если

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))$$

и g дифференцируема в θ , то

$$\sqrt{n}(g(\hat{\theta}) - g(\theta)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, [g'(\theta)]^2 \sigma^2(\theta)).$$

Это позволяет:

- строить интервалы для функций параметра $g(\theta)$;
- стабилизировать дисперсию;
- получать интервалы, автоматически учитывающие ограничения типа $\theta > 0$ после обратного преобразования.

9 8. Порядковые статистики и точные интервалы

Пусть $X_1, \dots, X_n$ имеют непрерывную функцию распределения F_θ .

Для минимума

$$X_{(1)} = \min_i X_i$$

имеем

$$\mathbb{P}_\theta(X_{(1)} > x) = (1 - F_\theta(x))^n.$$

Следовательно,

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_\theta(x))^n.$$

Для максимума

$$X_{(n)} = \max_i X_i$$

имеем

$$\mathbb{P}_\theta(X_{(n)} \leq x) = F_\theta(x)^n.$$

Как применять

Если параметр θ определяет границу носителя распределения, $X_{(1)}$ или $X_{(n)}$ часто позволяют получить **точный** pivot.

Это особенно важно для моделей типа

$$U(0, \theta)$$

и других распределений, носитель которых зависит от θ .

9.1 Пример: $U(0, \theta)$ и максимум

Если

$$X_i \sim U(0, \theta),$$

то для $0 < x < \theta$

$$\mathbb{P}_\theta(X_{(n)} \leq x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n.$$

Поэтому

$$\frac{X_{(n)}}{\theta}$$

имеет распределение, не зависящее от θ :

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_{(n)}}{\theta} \leq t\right) = t^n, \quad 0 < t < 1.$$

Это точная центральная статистика.

Скорость

В моделях с параметром на границе носителя экстремальная статистика может оценивать параметр со скоростью $1/n$, а не обычной скоростью $1/\sqrt{n}$.

10 9. Масштабные семейства

Пусть

$$X_i = \theta Y_i, \quad \theta > 0,$$

где распределение Y_i не зависит от θ .

Тогда многие статистики имеют вид

$$T(X) = \theta T(Y),$$

и, следовательно,

$$\frac{T(X)}{\theta}$$

является pivot.

Где это полезно?

Такая идея возникает, например, для:

- $U(0, \theta)$;
- некоторых параметризаций $\text{Exp}(\theta)$;
- $\Gamma(\alpha, \lambda)$ при фиксированном shape-параметре;
- Pareto-моделей после подходящего преобразования.

11 10. Монотонные преобразования

Если распределение исходной статистики неудобно, полезно найти преобразование, переводящее задачу в известное семейство.

Например, если

$$X \sim \text{Pareto}(\theta, 1)$$

в параметризации

$$\mathbb{P}(X > x) = x^{-\theta}, \quad x \geq 1,$$

то

$$Y = \log X$$

имеет экспоненциальное распределение с интенсивностью θ :

$$Y \sim \text{Exp}(\text{rate } \theta).$$

Следовательно,

$$2\theta \sum_{i=1}^n \log X_i$$

имеет распределение χ^2_{2n} .

Это сразу даёт точный pivot для θ .

⚠ Параметризация важна

Для Exp, Г и Pareto существуют разные соглашения о параметрах. Перед решением задачи всегда нужно явно записать плотность.

12 11. Распределение Коши: что делать без моментов?

Для

$$X_i \sim \text{Cauchy}(\theta, 1)$$

не существуют ни математическое ожидание, ни дисперсия. Поэтому применять ЦПТ к $\bar{X}$ нельзя.

Но медиана распределения равна θ . Выборочная медиана $\widehat{m}_n$ асимптотически нормальна.

! Асимптотика выборочной медианы

Если m — единственная медиана распределения и плотность f положительна и непрерывна в m , то

$$\sqrt{n}(\widehat{m}_n - m) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4f(m)^2}\right).$$

Для стандартного сдвинутого Коши

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{\pi},$$

поэтому

$$\sqrt{n}(\widehat{m}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\pi^2}{4}\right).$$

Следовательно,

$$\theta \in \left(\widehat{m}_n - z_{1-\alpha/2} \frac{\pi}{2\sqrt{n}}, \widehat{m}_n + z_{1-\alpha/2} \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \right)$$

является асимптотическим доверительным интервалом.

Главная идея

Отсутствие моментов не означает, что доверительный интервал построить невозможно. Нужно выбрать другую состоятельную и асимптотически нормальную статистику.

13 12. Гамма-распределение и информация Фишера

Пусть используется параметризация rate:

$$X_i \sim \Gamma(\alpha, \lambda),$$

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Тогда

$$\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Если α известно, естественная оценка

$$\hat{\lambda} = \frac{\alpha}{\bar{X}}.$$

Используя ЦПТ и дельта-метод, можно получить асимптотическую нормальность $\hat{\lambda}$ и построить Wald-интервал.

13.1 Если α также неизвестно

Теперь параметр двумерный:

$$\vartheta = (\alpha, \lambda).$$

Для MLE в регулярной модели

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta} - \vartheta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I(\vartheta)^{-1}),$$

где $I(\vartheta)$ — информация Фишера **на одно наблюдение**.

Для Gamma(shape α , rate λ)

$$I(\alpha, \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_1(\alpha) & -1/\lambda \\ -1/\lambda & \alpha/\lambda^2 \end{pmatrix},$$

где ψ_1 — тригамма-функция.

Наличие nuisance-параметра

Если интересует только λ , но α неизвестно, асимптотическая дисперсия $\hat{\lambda}$ берётся из соответствующего диагонального элемента

$$I(\alpha, \lambda)^{-1}.$$

После этого неизвестные параметры заменяются их состоятельными оценками.

14 13. Экспоненциальное распределение

Здесь особенно важно соглашение о параметризации.

14.1 Rate-параметризация

Если

$$f_{\theta}(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad x \geq 0,$$

то

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\theta}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\theta^2}.$$

MLE:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}.$$

По дельта-методу

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta^2).$$

Поэтому Wald-интервал имеет вид

$$\theta \in \left(\hat{\theta} - z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{n}}, \hat{\theta} + z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{n}} \right).$$

14.2 Scale-параметризация

Если

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x \geq 0,$$

то $\mathbb{E}X = \theta$ и

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta^2).$$

Здесь $\bar{X}$ сама является естественной оценкой параметра.

15 14. Нормальная выборка: точные pivots

Пусть

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(a, \sigma^2),$$

и

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Тогда

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Если вместо этого используется исправленная дисперсия

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

то

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Кроме того,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - a)}{S} \sim t_{n-1}.$$

! Независимость

В нормальной модели

$$\bar{X} \quad \text{и} \quad S^2$$

независимы. Именно это свойство лежит в основе точного t -интервала и совместных доверительных областей.

16 15. Точный доверительный интервал для дисперсии

Из

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

получаем

$$\mathbb{P} \left(\chi_{\alpha/2, n-1}^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2 \right) = \gamma.$$

После обращения:

$$\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2} \right).$$

⚠ Порядок квантилей переворачивается

Поскольку σ^2 находится в знаменателе pivot, при обращении неравенств верхний квантиль χ^2 даёт **нижнюю** границу для σ^2 .

17 16. Доверительные области для вектора параметров

Если параметр многомерный,

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k),$$

аналогом доверительного интервала является **доверительная область** $C(X)$:

$$\mathbb{P}_\theta(\theta \in C(X)) \geq \gamma.$$

Для нормальной модели с неизвестными (a, σ^2) можно комбинировать точные pivots для среднего и дисперсии.

i Как получить совместный уровень γ ?

Нельзя автоматически взять два отдельных интервала уровня γ и считать их декартово произведение областью уровня γ .

Нужно контролировать **совместную** вероятность покрытия. Если события независимы, можно выбрать уровни γ_1, γ_2 так, чтобы

$$\gamma_1 \gamma_2 = \gamma.$$

Другой универсальный вариант — использовать поправку Бонферрони.

Для хорошей последовательности доверительных областей естественно требовать, чтобы её диаметр или площадь стремились к нулю при $n \rightarrow \infty$.

18 17. CIs in inferential statistics

В прикладной статистике доверительный интервал тесно связан с проверкой гипотез.

! Двойственность теста и доверительного интервала

Для двустороннего теста уровня значимости α множество значений θ_0 , которые **не отвергаются** тестом, часто совпадает с доверительным интервалом уровня

$$1 - \alpha.$$

То есть доверительный интервал можно получить обращением семейства тестов.

18.1 17.1. Доверительный интервал для доли

Пусть

$$X_1, \dots, X_n \sim \text{Bernoulli}(p),$$

и

$$\hat{p} = \bar{X}.$$

Тогда

$$\sqrt{n}(\hat{p} - p) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, p(1-p)).$$

Простейший Wald-интервал:

$$p \in \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right).$$

⚠ Wald CI для доли

При малых n или p близком к 0 или 1 этот интервал может работать плохо и даже выходить за $[0, 1]$. В прикладной работе часто предпочитают Wilson score interval или точный Clopper–Pearson interval.

18.1.1 Связь с proportion z -test

Для проверки

$$H_0 : p = p_0$$

используется статистика

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}.$$

Обращение условия

$$|Z| \leq z_{1-\alpha/2}$$

относительно p_0 приводит к **score/Wilson-интервалу**, а не к Wald-интервалу.

18.2 17.2. z -интервал для среднего

Пусть

$$X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

и σ^2 известно. Тогда

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Поэтому точный интервал:

$$\mu \in \left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

Он является обращением двустороннего z -test для

$$H_0 : \mu = \mu_0.$$

18.3 17.3. t -интервал для среднего

Если выборка нормальная, но σ^2 неизвестно, то

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t_{n-1}.$$

Поэтому

$$\mu \in \left(\bar{X} - t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right).$$

💡 z или t ?

- σ известно $\Rightarrow$ точный z -интервал.
- σ неизвестно и данные нормальны $\Rightarrow$ точный t -интервал.
- Для больших выборок t -квантиль приближается к соответствующему z -квантилю.

18.4 17.4. Доверительный интервал для дисперсии

Для нормальной выборки точный интервал для σ^2 основан на

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Поэтому

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2} \right).$$

Этот интервал является аналогом обращения χ^2 -теста для гипотезы

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2.$$

19 18. Интервалы на основе MLE и информации Фишера

В регулярной параметрической модели MLE удовлетворяет

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{\text{MLE}} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{I_1(\theta)}\right),$$

где $I_1(\theta)$ — информация Фишера одного наблюдения.

Отсюда

$$\hat{\theta}_{\text{MLE}} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n I_1(\hat{\theta}_{\text{MLE}})}}.$$

i Наблюдаемая информация

Вместо ожидаемой информации Фишера часто используют наблюдаемую информацию

$$J_n(\hat{\theta}) = -\ell_n''(\hat{\theta}).$$

Тогда стандартная ошибка оценивается как

$$\text{se}(\hat{\theta}) \approx \frac{1}{\sqrt{J_n(\hat{\theta})}}.$$

20 19. Асимптотика длины интервала

Для Wald-интервала

$$\hat{\theta} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

длина равна

$$L_n = 2z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}.$$

Если

$$\hat{\sigma} \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma(\theta),$$

то

$$\sqrt{n} L_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 2z_{1-\alpha/2} \sigma(\theta).$$

Следовательно,

$$L_n = O_{\mathbb{P}}(n^{-1/2}).$$

💡 Но не всегда $n^{-1/2}$

Для нерегулярных моделей, особенно когда параметр задаёт границу носителя, возможна другая скорость. Например, максимум выборки из $U(0, \theta)$ приближается к θ со скоростью порядка $1/n$.

21 20. Что нужно распознавать в задачах

💡 Быстрый алгоритм

Шаг 1. Определите: нужен точный или асимптотический интервал?

Шаг 2. Ищите известный pivot: - нормальное распределение $\Rightarrow Z, t, \chi^2$; - суммы экспоненциальных величин $\Rightarrow \Gamma/\chi^2$; - порядковые статистики $\Rightarrow$ используйте их точные распределения; - масштабное семейство $\Rightarrow$ попробуйте $T(X)/\theta$.

Шаг 3. Если точного pivot нет, найдите асимптотически нормальную оценку.

Шаг 4. Если асимптотическая дисперсия зависит от θ , выберите один из трёх подходов: 1. обратить неравенство; 2. подставить состоятельную оценку дисперсии; 3. стабилизировать дисперсию.

Шаг 5. Проверьте пространство параметров: например, $\theta > 0, p \in [0, 1]$.

Шаг 6. Если требуется асимптотика длины, найдите ведущий порядок границ.

22 21. Карта методов для задач семинара

Модель / задача	Основная идея
$U(0, \theta)$ через $\bar{X}$	точное распределение суммы/среднего после масштабирования
$U(0, \theta)$ через $X_{(1)}, X_{(n)}$	точные распределения порядковых статистик
Плотность на $[0, 2\theta]$, использование $X_{(1)}$	распределение минимума
$\text{Cauchy}(\theta, 1)$	выборочная медиана и её асимптотическая нормальность
$\text{Pois}(\theta)$	ЦПТ + три способа построения асимптотического ДИ
$\Gamma(\alpha, \lambda)$	ЦПТ/дельта-метод или MLE + информация Фишера
$\text{Pareto}(\theta, 1)$	логарифмическое преобразование $\rightarrow$ exponential/gamma pivot
$\text{Exp}(\theta)$	ЦПТ + дельта-метод; внимательно к параметризации
$\mathcal{N}(a, \sigma^2)$	t - и χ^2 -pivots, независимость $\bar{X}$ и S^2

❗ Главный принцип

Не нужно запоминать отдельную формулу доверительного интервала для каждого распределения.

Нужно уметь находить статистику, распределение которой:

1. известно точно и не зависит от параметра — **точный pivot**, или
2. асимптотически известно — **асимптотический pivot**,

а затем **обратить вероятностное неравенство относительно неизвестного параметра**.