

Неделя 4. Винеровский процесс

Carlos Buitrago

Table of contents

1	1. Определение и существование	1
1.1	Существование: согласованность приращений	1
1.2	Конструкция на сетке	2
2	2. Эквивалентное гауссовское определение	2
2.1	Матрица ковариаций и её геометрия	3
3	3. Непрерывные модификации	5
4	4. Недифференцируемость траекторий	6
5	5. Закон повторного логарифма (ЗПЛ)	7
6	6. Локальный ЗПЛ и обращение времени	9
7	7. Дополнительные фундаментальные свойства	9
7.1	Масштабная инвариантность	10
7.2	Марковское свойство и мартингал	10
7.3	Принцип отражения и максимум	10
7.4	Броуновский мост	10

1 1. Определение и существование

! Определение 1.1

Процесс $(W_t)_{t \geq 0}$ называется **винеровским**, если:

1. $W_0 = 0$ почти наверное;
2. приращения на непересекающихся временных интервалах независимы;
3. для $0 \leq s < t$ выполняется $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

Отсюда $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, $\mathbb{E}W_t = 0$, $\text{Var}(W_t) = t$. Приращения **стационарны**: их распределение зависит только от длины интервала.

1.1 Существование: согласованность приращений

Характеристическая функция нормального приращения:

$$\varphi_{s,t}(u) = \exp\left(-\frac{u^2(t-s)}{2}\right).$$

Для $s < r < t$:

$$\varphi_{s,t}(u) = \varphi_{s,r}(u)\varphi_{r,t}(u).$$

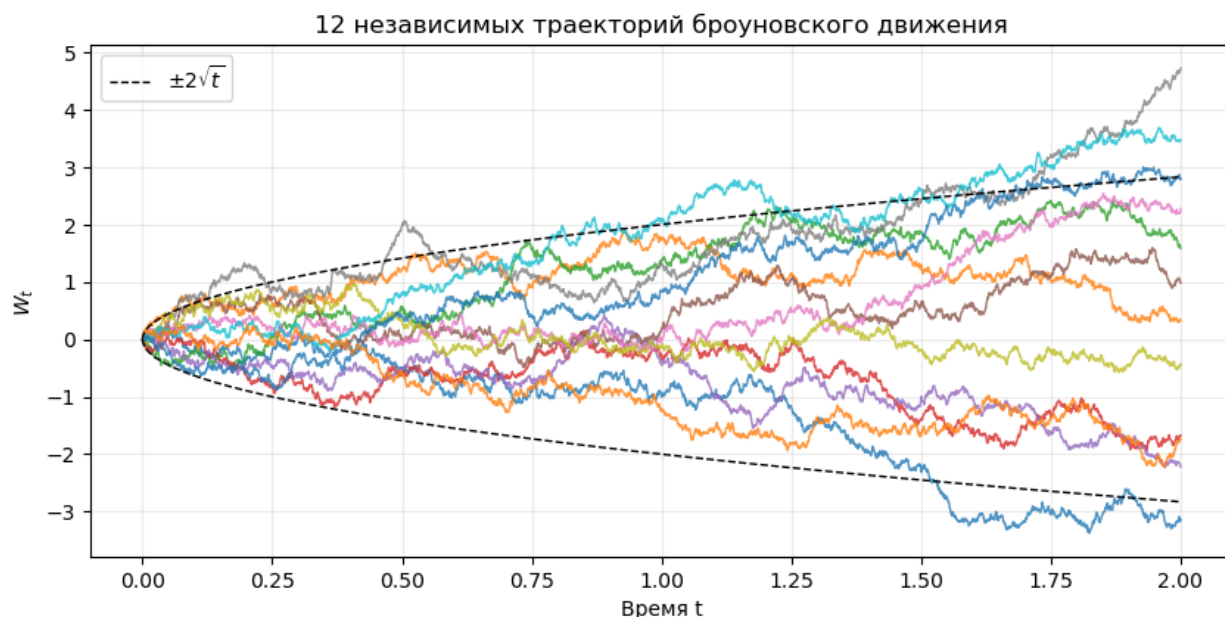
Это согласованность с суммой независимых приращений. Вместе с теоремой существования процессов с независимыми приращениями она обеспечивает существование процесса с заданными конечномерными распределениями. Позже теорема Колмогорова даст непрерывную модификацию.

1.2 Конструкция на сетке

Для $t_k = k\Delta t$ берём независимые $Z_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и полагаем

$$W_{t_0} = 0, \quad W_{t_k} = \sum_{j=1}^k \sqrt{\Delta t} Z_j.$$

Линейная интерполяция служит численной аппроксимацией, **не** точной траекторией между узлами.



2. Эквивалентное гауссовское определение

💡 Теорема 1.1

Процесс W является винеровским в смысле определения выше **тогда и только тогда**, когда он гауссовский и

$$\mathbb{E}W_t = 0, \quad \text{Cov}(W_s, W_t) = \min(s, t).$$

Доказательство $\Rightarrow$. Для $s \leq t$ имеем $W_t = W_s + (W_t - W_s)$. Независимость приращений даёт

$$\text{Cov}(W_s, W_t) = \text{Var}(W_s) = s.$$

При $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ вектор приращений

$$\eta = (W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$$

имеет независимые нормальные координаты, следовательно гауссовский. Вектор значений $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ — его линейное преобразование и тоже гауссовский.

Доказательство $\Leftarrow$. Сначала ядро $K(s, t) = \min(s, t)$ неотрицательно определено, поскольку

$$\min(s, t) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0, s]}(u) \mathbf{1}_{[0, t]}(u) du$$

и для любых $a_i \in \mathbb{R}, t_i \geq 0$:

$$\sum_{i, j} a_i a_j K(t_i, t_j) = \int_0^\infty \left(\sum_i a_i \mathbf{1}_{[0, t_i]}(u) \right)^2 du \geq 0.$$

По теореме существования гауссовского процесса такой процесс существует. У него $\text{Var}(W_0) = 0$, поэтому $W_0 = 0$ п.н. Разность $W_t - W_s$ нормальна, центрирована и имеет дисперсию

$$t + s - 2 \min(s, t) = t - s \quad (s \leq t).$$

Приращения на непересекающихся интервалах некоррелированы (раскрыть четыре ковариации); поскольку их совместный вектор гауссовский, они **независимы**. $\square$

 Почему важно слово «гауссовский»?

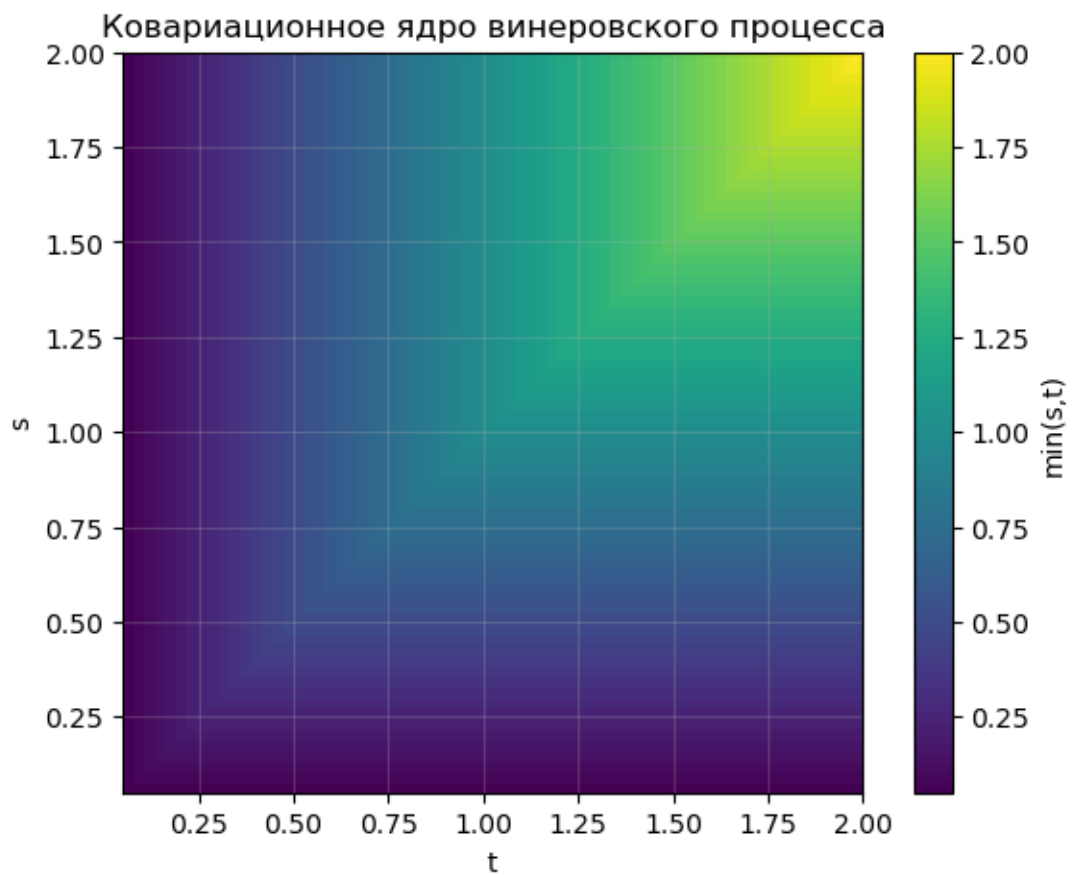
Некоррелированность не влечёт независимости для произвольных случайных величин. Именно совместная гауссовость позволяет заключить независимость из нулевой ковариации.

2.1 Матрица ковариаций и её геометрия

Для $0 < t_1 < \dots < t_n$:

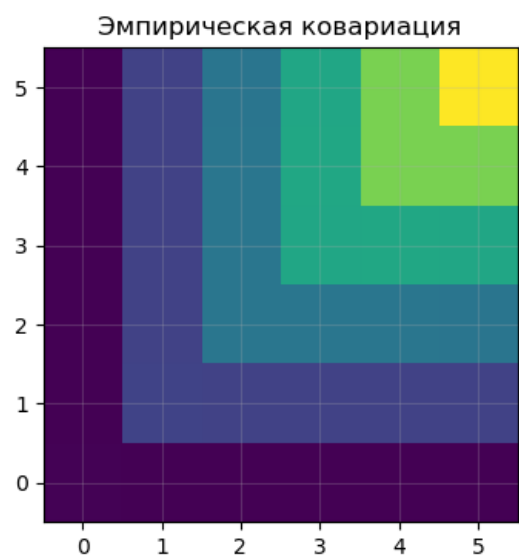
$$\Sigma_{ij} = \min(t_i, t_j), \quad \Sigma = L \text{diag}(\Delta t_1, \dots, \Delta t_n) L^\top,$$

где L — нижнетреугольная матрица из единиц, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ и $t_0 = 0$. Это также даёт простой алгоритм точной симуляции конечномерного распределения.



Минимальное собственное значение: 0.0070687563313333295

Максимальная ошибка ковариации: 0.021064404173230078



3. Непрерывные модификации

Определение 1.2. Процесс Y называется **модификацией** X , если для каждого фиксированного t :

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

Важно: событие вероятности 1 может зависеть от t . Это слабее **неразличимости**: $\mathbb{P}(\forall t X_t = Y_t) = 1$.

 **Теорема 1.2** (Колмогорова о непрерывной модификации)

Если для $t, s \in [a, b]$ существуют $C, \alpha, \varepsilon > 0$ такие, что

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t - s|^{1+\varepsilon},$$

то существует модификация с непрерывными траекториями. Более того, можно выбрать траектории локально гёльдеровыми любого порядка $\gamma < \varepsilon/\alpha$.

Следствие 1.1. Винеровский процесс имеет непрерывную модификацию.

Доказательство. Для $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$: $\mathbb{E}Z^4 = 3$, поэтому

$$\mathbb{E}|W_t - W_s|^4 = 3|t - s|^2.$$

Подходит $\alpha = 4, \varepsilon = 1, C = 3$. На каждом $[n, n+1]$ выбираем непрерывную модификацию. В соседних концах они совпадают п.н.; пересечение счётного числа этих событий имеет вероятность 1. Склеиваем траектории, а на исключительном нулевом событии задаём нулевую траекторию. Получаем непрерывную модификацию на $[0, \infty)$.

 **Усиление: гёльдерова регулярность**

Для любого $p > 2$:

$$\mathbb{E}|W_t - W_s|^p = \mathbb{E}|Z|^p |t - s|^{p/2}.$$

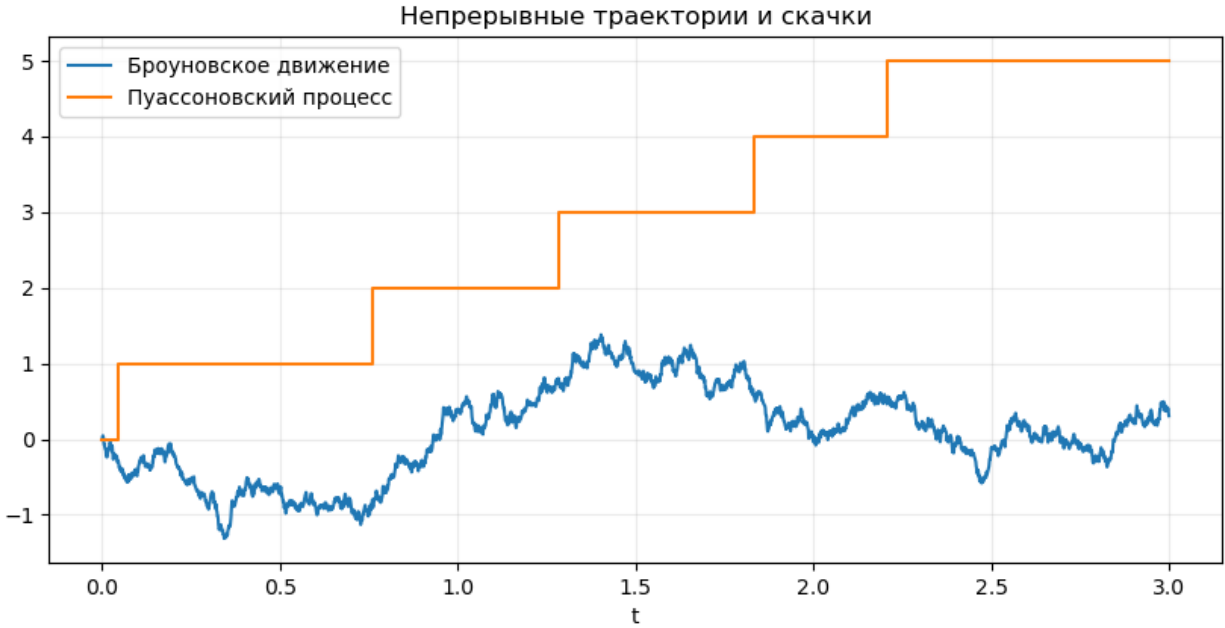
Колмогоров даёт показатель $\gamma < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. Устремляя $p \rightarrow \infty$ по счётной последовательности, получаем: траектории локально гёльдеровы любого порядка $\gamma < 1/2$. При $\gamma \geq 1/2$ такого свойства почти наверное нет.

Почему нужно $\varepsilon > 0$? Для пуассоновского процесса интенсивности λ :

$$\mathbb{E}|N_t - N_s| = \lambda|t - s|,$$

но на любом интервале положительной длины скачок случается с положительной вероятностью. Непрерывной модификации у него нет: непрерывная модификация и исходный процесс совпали бы п.н. во всех рациональных временах, что несовместимо со скачками.

Дополнение для централизованного гауссовского процесса. Достаточно оценки $\mathbb{E}|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t - s|^\delta$ для любых $\alpha, \delta > 0$: гауссовость позволяет перейти к сколь угодно высоким моментам и применить теорему Колмогорова.



4. Недифференцируемость траекторий

! Теорема 1.3 (Пэли—Зигмунд—Винер)

Почти наверное траектория стандартного броуновского движения **нигде не дифференцируема** на $[0, \infty)$ (в нуле — справа).

Интуиция: на масштабе h типичное приращение имеет порядок $\sqrt{h}$, поэтому отношение

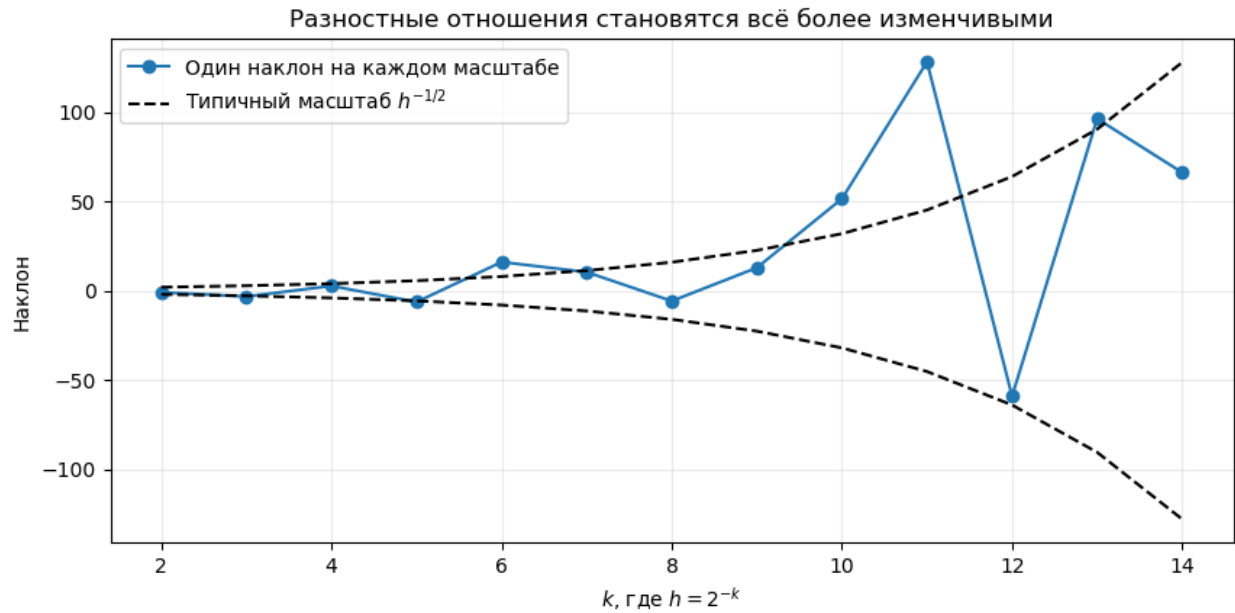
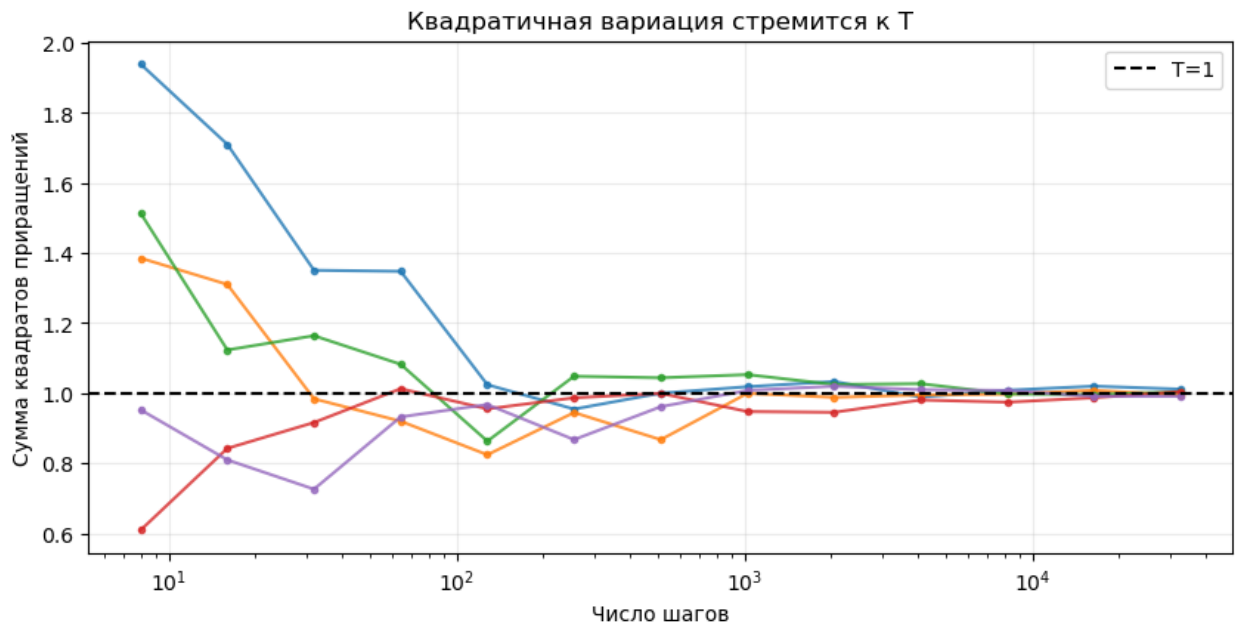
$$\frac{W_{t+h} - W_t}{h} \stackrel{d}{=} \frac{Z}{\sqrt{h}}$$

не стабилизируется при $h \downarrow 0$. Это объясняет отсутствие производной в **фиксированной** точке; утверждение «нигде» существенно сильнее и требует отдельного доказательства.

Дополнительный факт: квадратичная вариация. Для равномерного разбиения $[0, T]$:

$$Q_n = \sum_{k=1}^n (W_{kT/n} - W_{(k-1)T/n})^2 \xrightarrow{L^2} T.$$

Действительно, $\mathbb{E}Q_n = T$ и $\text{Var}(Q_n) = 2T^2/n$. При вложенных двоичных разбиениях сходимость также почти наверное. Это ключевой мотив исчисления Ито.



5 5. Закон повторного логарифма (ЗПЛ)

💡 Теорема 1.4 (глобальный ЗПЛ)

Для непрерывной версии винеровского процесса почти наверное

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1.$$

Знаменатель определён при $t > e$.

Доказательство второй формулы. Процесс $-W$ тоже винеровский; применим первую формулу к $-W$.

Геометрический смысл. Для любого $\varepsilon > 0$ почти наверное существует случайное T_ε , после которого

$$|W_t| \leq (1 + \varepsilon)\sqrt{2t \ln \ln t}.$$

Но при этом траектория бесконечно часто достигает уровней выше $(1 - \varepsilon)\sqrt{2t \ln \ln t}$ и ниже $-(1 - \varepsilon)\sqrt{2t \ln \ln t}$.

⚠ Важное ограничение симуляций

$\ln \ln t$ растёт чрезвычайно медленно. На конечном графике нельзя «проверить» предельный ЗПЛ: видимая траектория может долго не достигать нормированного уровня 1.



6. Локальный ЗПЛ и обращение времени

💡 Следствие 1.3 (локальный ЗПЛ)

Почти наверное

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln(1/t)}} = 1, \quad \liminf_{t \downarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln(1/t)}} = -1.$$

Здесь берём достаточно малые t , например $0 < t < e^{-1}$.

Доказательство через обращение времени. Определим

$$B_0 = 0, \quad B_t = tW_{1/t}, \quad t > 0.$$

Это центрированный гауссовский процесс и для $s, t > 0$

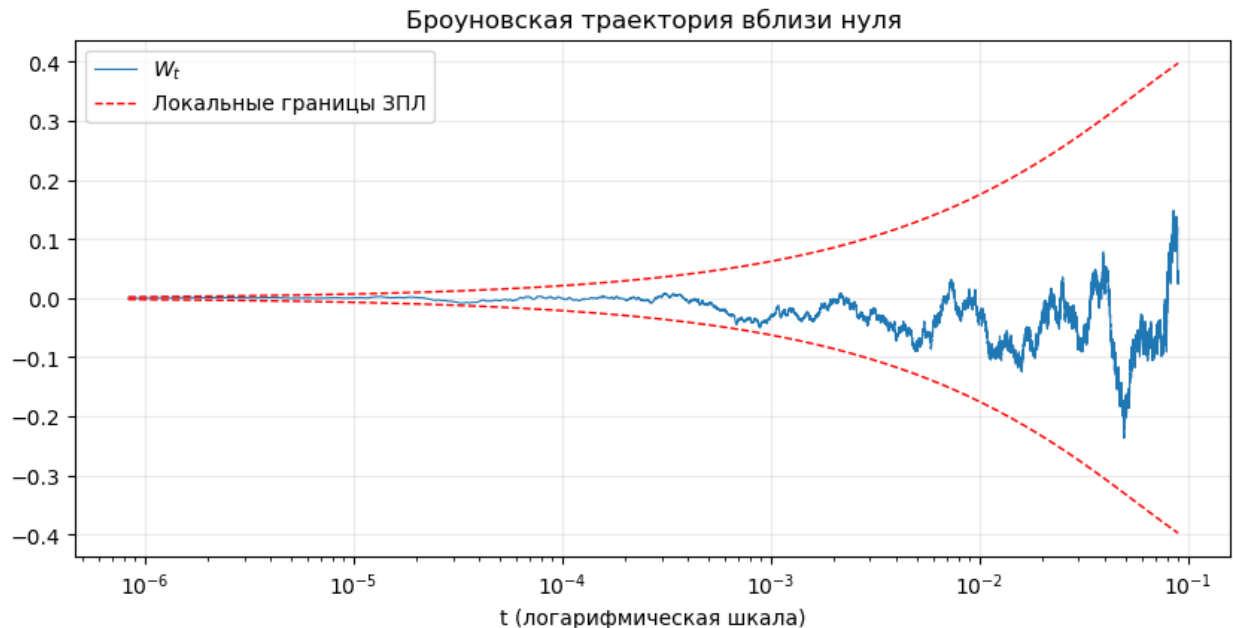
$$\text{Cov}(B_s, B_t) = st \min(1/s, 1/t) = \min(s, t).$$

Также $\text{Cov}(B_0, B_t) = 0$. По теореме 1.1 B — винеровский процесс по конечномерным распределениям; выбираем непрерывную версию. Полагая $u = 1/t$ и используя глобальный ЗПЛ для B , получаем

$$\frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln(1/t)}} = \frac{B_{1/t}}{\sqrt{2(1/t) \ln \ln(1/t)}}.$$

При $t \downarrow 0$ правая часть имеет $\limsup 1$ и $\liminf -1$. $\square$

Следствие (дополнение). В нуле производная не существует даже справа: $|W_t|/t$ испытывает сколь угодно большие осцилляции. По стационарности приращений это также верно в каждой **фиксированной** точке; теорема 1.3 утверждает одновременно для всех точек.



7. Дополнительные фундаментальные свойства

Эти факты добавлены сверх конспекта и полезны для дальнейших тем курса.

7.1 Масштабная инвариантность

Для $c > 0$ процесс $\widetilde{W}_t = c^{-1/2}W_{ct}$ — снова винеровский. Проверка: гауссовость сохраняется, а ковариация равна $c^{-1} \min(cs, ct) = \min(s, t)$.

7.2 Марковское свойство и мартингал

Для $s < t$: $W_t = W_s + (W_t - W_s)$, причём новое приращение независимо от прошлого $\mathcal{F}_s$. Поэтому

$$\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s, \quad W_t \mid \mathcal{F}_s \sim \mathcal{N}(W_s, t - s).$$

Кроме того, $W_t^2 - t$ — мартингал, так как

$$\mathbb{E}[W_t^2 \mid \mathcal{F}_s] = W_s^2 + (t - s).$$

7.3 Принцип отражения и максимум

Для $a > 0$ и $T > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\max_{0 \leq t \leq T} W_t \geq a\right) = 2\mathbb{P}(W_T \geq a) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{T}}\right)\right).$$

Следовательно $\max_{t \leq T} W_t \stackrel{d}{=} |W_T|$. Для времени первого достижения $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}$:

$$\mathbb{P}(\tau_a \leq T) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{T}}\right)\right).$$

7.4 Броуновский мост

Процесс $B_t = W_t - tW_1$ на $[0, 1]$ имеет $B_0 = B_1 = 0$ и

$$\text{Cov}(B_s, B_t) = \min(s, t) - st.$$

Это гауссовский процесс, возникающий как броуновское движение, условленное на $W_1 = 0$ (в смысле условного распределения).

