

Неделя 5. Марковские моменты

Carlos Buitrago

Table of contents

1	Неделя 5: Марковские моменты	1
1.1	1. Фильтрации и информация во времени	1
1.2	2. Марковские моменты и моменты остановки	2
1.3	3. σ -алгебра остановленного времени $\mathcal{F}_\tau$	3
1.4	4. Марковское и строго марковское свойства броуновского движения	3
1.4.1	1.4.1 Вспомогательные факты	4
1.4.2	1.4.2 Идея доказательства строгого марковского свойства	4
1.5	5. Принцип отражения	4
1.6	6. Первое достижение уровня и максимум	5
1.6.1	1.6.1 Совместное распределение M_t и W_t	5
1.7	7. Дополнение: распределение времени первого достижения	6
1.8	8. Дополнение: совместная плотность максимума и конечного положения	7
1.8.1	1.8.1 Дополнение: барьерные события	7
1.9	9. Дополнение: дискретизация и броуновский мост между узлами	8
1.10	10. Дополнение: почему нельзя остановиться «в последний раз»?	8
1.11	11. Дополнение: приложения	8
1.12	13. Краткая карта результатов	9

1 Неделя 5: Марковские моменты

Материал лекции: **фильтрации, марковские моменты, $\mathcal{F}_\tau$, строго марковское свойство винеровского процесса, принцип отражения, первое достижение уровня, совместное распределение максимума и конечного положения, теорема Башелье.** Дополнительные результаты и моделирование специально отмечены.

i Что мы хотим понять?

Обычная независимость приращений позволяет «перезапустить» броуновское движение в фиксированный момент a . Можно ли сделать то же самое в *случайный* момент, определённый наблюдаемой траекторией? Да — если это **момент остановки**.

1.1 1. Фильтрации и информация во времени

Определение (фильтрация). Семейство $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ под- σ -алгебр $\mathcal{F}$ называется фильтрацией, если

$$s \leq t \implies \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}.$$

Адаптированный процесс. $X = (X_t)$ согласован с $\mathbb{F}$, если X_t измерим относительно $\mathcal{F}_t$ для каждого t .

Порожденная σ -алгебра: $\sigma(\xi) = \{\xi^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Для семейства случайных величин $\sigma(\xi_\alpha, \alpha \in A)$ — наименьшая σ -алгебра, относительно которой измеримы все ξ_α .

Естественная фильтрация:

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \leq t).$$

Каждый процесс адаптирован к своей естественной фильтрации.

💡 Интуиция: информация, а не значение

$\mathcal{F}_t$ содержит *всю* информацию, доступную к моменту t . Событие $\{\sup_{s \leq t} W_s > a\}$ известно в момент t , а событие $\{W_{t+1} > a\}$ в общем случае нет.

1.2 2. Марковские моменты и моменты остановки

Определение (конвенция лекции). Случайное время $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$ называется **марковским моментом** относительно $\mathbb{F}$, если

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{для всех } t \in T.$$

Если дополнительно $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$, то в терминологии лекции τ называется **моментом остановки**. Во многих книгах термин «момент остановки» допускает значение ∞ с положительной вероятностью; далее используем конвенцию лекции.

Пример. В дискретном времени для борелевского B :

$$\tau_B = \inf\{n \geq 1 : X_n \in B\}, \quad \{\tau_B \leq n\} = \bigcup_{k=1}^n \{X_k \in B\} \in \mathcal{F}_n^X.$$

Здесь $\inf \emptyset = \infty$. Напротив, $\inf\{n \geq 1 : X_{n+1} \in B\}$ **вообще говоря не** является марковским моментом: его проверка требует заглянуть на один шаг вперёд.

В дискретном времени условие эквивалентно $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ для каждого n (при индексировании с $n = 1$).

⚠ Важно: зависимость от фильтрации

Одно и то же случайное время может быть моментом остановки относительно одной фильтрации и не быть им относительно другой. Например, при заранее раскрытом будущем информация существенно шире.



1.3 3. σ -алгебра остановленного времени $\mathcal{F}_\tau$

Определение:

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \forall t \geq 0\}.$$

Это события, которые можно распознать, когда часы остановились в момент τ .

Свойства: $\mathcal{F}_\tau$ — σ -алгебра; τ измерима относительно $\mathcal{F}_\tau$; для детерминированного $\tau = a$ имеем $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_a$.

Дополнительно. Для непрерывного адаптированного процесса X величина X_τ измерима относительно $\mathcal{F}_\tau$ (при конечном τ и обычных условиях на фильтрацию). Остановленный процесс $X_{t \wedge \tau}$ хранит траекторию до остановки.

1.4 4. Марковское и строго марковское свойства броуновского движения

Марковское свойство в фиксированный момент. Для любого $a \geq 0$ процесс

$$B_t = W_{a+t} - W_a, \quad t \geq 0,$$

является стандартным винеровским процессом и независим от $\mathcal{F}_a^W$.

Строго марковское свойство. Если $\tau < \infty$ почти наверное — момент остановки относительно естественной фильтрации W , то

$$B_t = W_{\tau+t} - W_\tau, \quad t \geq 0$$

— стандартный винеровский процесс, **независимый от $\mathcal{F}_\tau^W$** .

! Что именно утверждается?

Независимо от того, как долго мы ждали и что происходило до остановки, **новые приращения после остановки** распределены как новое броуновское движение. При этом сам W_τ обычно не независим от τ .

1.4.1 Вспомогательные факты

1. Если $\mathbb{E}f(\xi) = \mathbb{E}f(\eta)$ для всех ограниченных непрерывных $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, то $\xi \stackrel{d}{=} \eta$.
2. Если $\mathbb{E}[f(\xi)\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}f(\xi)\mathbb{P}(A)$ для всех таких f , то ξ независим от события A .

Для первого утверждения достаточно рассмотреть $\cos\langle u, x \rangle$ и $\sin\langle u, x \rangle$ и применить теорему единственности характеристических функций.

1.4.2 Идея доказательства строгого марковского свойства

Шаг 1 (дискретизация времени остановки). Положим

$$\tau_n = 2^{-n} \lceil 2^n \tau \rceil.$$

Тогда $\tau_n \downarrow \tau$, τ_n — марковские моменты и по непрерывности $W_{\tau_n+t} - W_{\tau_n} \rightarrow W_{\tau+t} - W_{\tau}$ почти наверное для каждого t .

Шаг 2 (суммирование по значениям). Для $A \in \mathcal{F}_{\tau}$, f ограниченной непрерывной и $0 \leq t_1 < \dots < t_m$:

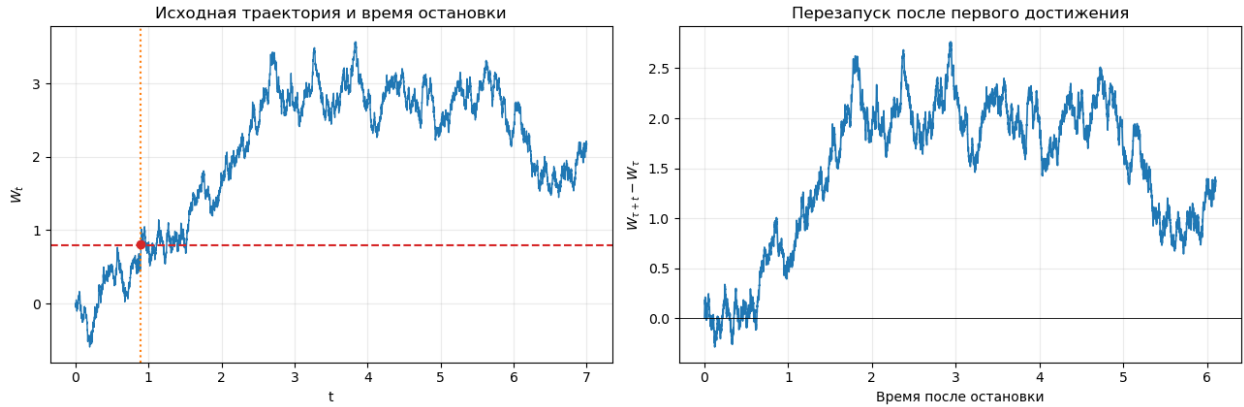
$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [f(W_{\tau_n+t_1} - W_{\tau_n}, \dots, W_{\tau_n+t_m} - W_{\tau_n}) \mathbf{1}_A] \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E} [f(W_{k2^{-n}+t_1} - W_{k2^{-n}}, \dots) \mathbf{1}_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}}] \\ &= \mathbb{E}[f(W_{t_1}, \dots, W_{t_m})] \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Здесь $A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}}$, поэтому применима независимость будущих приращений от прошлого.

Шаг 3 (предел). Теорема Лебега о мажорируемой сходимости позволяет перейти к пределу под знаком математического ожидания. Получаем нужное тождество для τ , а значит равенство конечномерных распределений и независимость от $\mathcal{F}_{\tau}$.

i Теорема Лебега о мажорируемой сходимости

Если $\xi_n \rightarrow \xi$ почти наверное и $|\xi_n| \leq \eta$ при $\mathbb{E}\eta < \infty$, то $\mathbb{E}\xi_n \rightarrow \mathbb{E}\xi$ и $\mathbb{E}|\xi_n - \xi| \rightarrow 0$. Здесь мажорантой служит константа $\|f\|_{\infty}$.



1.5 5. Принцип отражения

Теорема (принцип отражения). Пусть $\tau < \infty$ почти наверное — момент остановки. Определим

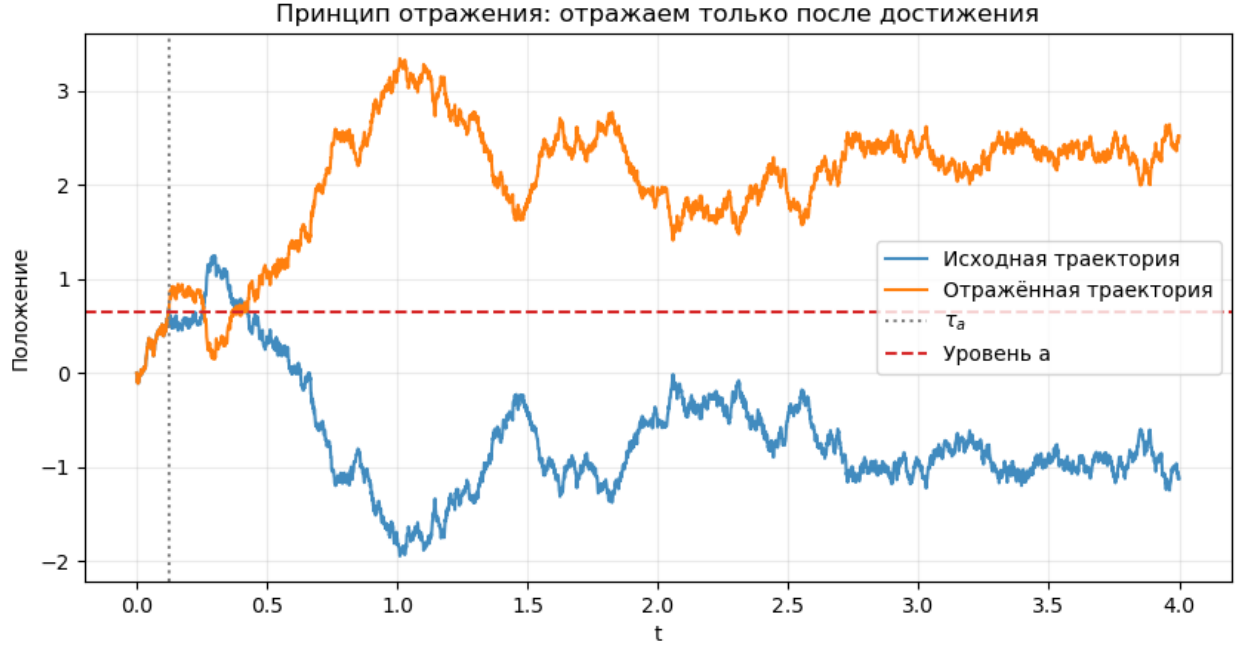
$$Z_t = \begin{cases} W_t, & t \leq \tau, \\ 2W_{\tau} - W_t, & t > \tau. \end{cases}$$

Тогда Z — стандартный винеровский процесс.

Почему? После τ приращения образуют независимое броуновское движение B . Симметрия $B \stackrel{d}{=} -B$ позволяет заменить его на $-B$ без изменения распределения полной траектории.

💡 Геометрическая интерпретация

Мы оставляем путь до первого достижения уровня a , а весь последующий участок отражаем относительно горизонтальной прямой $y = a$.



1.6 6. Первое достижение уровня и максимум

Для $a > 0$ определим

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}, \quad M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} W_s.$$

Лемма. τ_a — марковский момент. Действительно, по непрерывности траекторий

$$\{\tau_a \leq t\} = \{\sup_{s \leq t} W_s \geq a\} = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, t]} \{W_q > a - 1/m\} \in \mathcal{F}_t^W.$$

При $t = 0$ и $a > 0$ событие пусто. Из закона повторного логарифма следует $\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = 1$.

Кроме того, M_t измерима относительно $\mathcal{F}_t^W$ и

$$\boxed{\{M_t \geq a\} = \{\tau_a \leq t\}}.$$

1.6.1 Совместное распределение M_t и W_t

Теорема из лекции. Для $x, y \geq 0, t > 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}(W_t < y - x, M_t \geq y) = \mathbb{P}(W_t > y + x)}.$$

Доказательство. На событии $\{M_t \geq y\}$ отражаем путь после τ_y . При этом $W_t < y - x$ превращается в $Z_t > y + x$. Поскольку Z — винеровский процесс и $Z_t > y + x$ автоматически означает достижение y , получаем равенство.

Теорема Башелье (следствие):

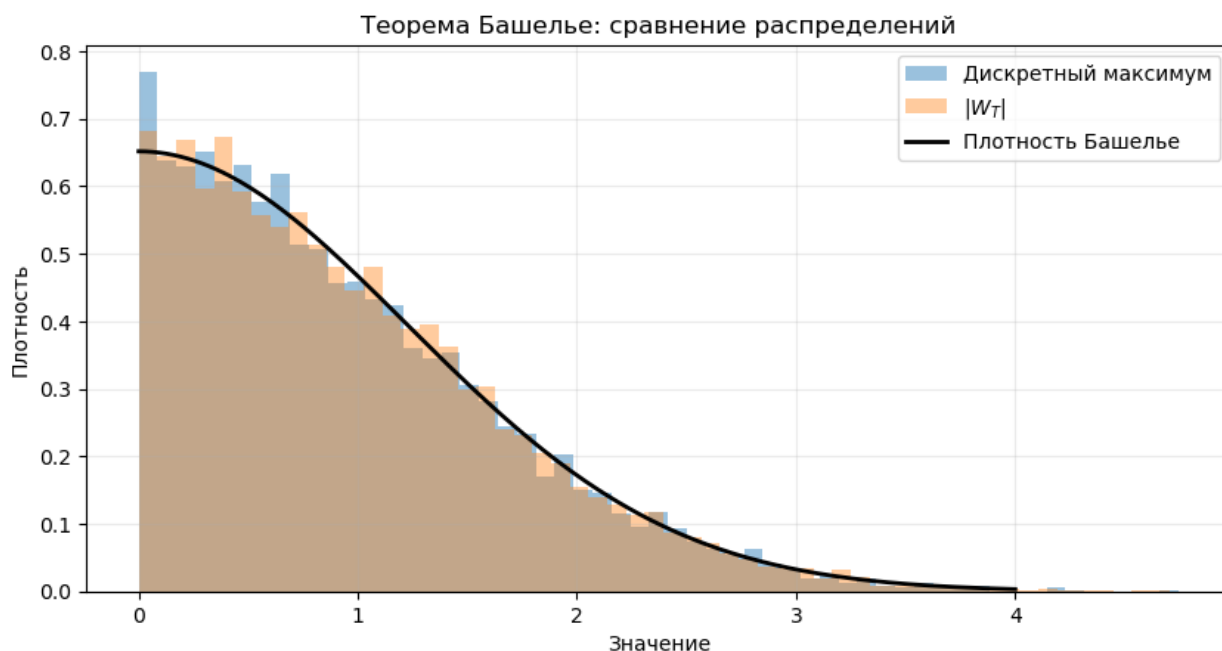
$$M_t \stackrel{d}{=} |W_t|.$$

Действительно, для $a \geq 0$:

$$\mathbb{P}(M_t \geq a) = 2\mathbb{P}(W_t \geq a) = 2 \left(1 - \Phi \left(\frac{a}{\sqrt{t}} \right) \right).$$

⚠ Равенство по распределению — не равенство траекторий

M_t и $|W_t|$ имеют одинаковое распределение для **каждого фиксированного t** , но процессы (M_t) и $(|W_t|)$ не равны по распределению как процессы: M_t не убывает, а $|W_t|$ может уменьшаться.



Средние: максимум сетки = 0.96 , $|W_T|$ = 0.973 , теория = 0.977

1.7 7. Дополнение: распределение времени первого достижения

Это следствие принципа отражения, **не выписанное явно в исходном конспекте**.

Для $a > 0, t > 0$:

$$\mathbb{P}(\tau_a \leq t) = 2 \left(1 - \Phi \left(\frac{a}{\sqrt{t}} \right) \right).$$

Дифференцируя по t , получаем плотность

$$f_{\tau_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left(-\frac{a^2}{2t} \right), \quad t > 0.$$

Неожиданный факт: $\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = 1$, но $\mathbb{E}\tau_a = \infty$. Плотность имеет тяжёлый хвост порядка $t^{-3/2}$.

Масштабирование: $\tau_a \stackrel{d}{=} a^2 \tau_1$.

i Почему среднее бесконечно?

При $t \rightarrow \infty$ имеем $f_{\tau_a}(t) \sim a(2\pi)^{-1/2}t^{-3/2}$. Поэтому $tf_{\tau_a}(t)$ ведёт себя как константа, умноженная на $t^{-1/2}$, интеграл которой на бесконечности расходится.



Медиана: 2.238 | 99%-квантиль: 6810.11

1.8 8. Дополнение: совместная плотность максимума и конечного положения

Из отражения при $m \geq \max(0, w)$ получается

$$\mathbb{P}(M_t \leq m, W_t \in dw) = [p_t(w) - p_t(2m - w)]dw,$$

где $p_t(z) = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-z^2/(2t))$. Дифференцирование по m даёт

$$f_{M_t, W_t}(m, w) = \frac{2(2m - w)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2m - w)^2}{2t}\right), \quad m \geq \max(0, w).$$

1.8.1 Дополнение: барьерные события

Вероятность не достичь верхнего барьера $a > 0$ до T :

$$\mathbb{P}\left(\max_{s \leq T} W_s < a\right) = 2\Phi(a/\sqrt{T}) - 1.$$

Это базовая формула для задач надёжности, достижения порога и барьерных опционов.

1.9 9. Дополнение: дискретизация и броуновский мост между узлами

Симуляция W на сетке может пропустить пересечение барьера между двумя соседними моментами. Если $W_{t_i} = x < a$ и $W_{t_{i+1}} = y < a$, то условная вероятность пересечения уровня a на этом интервале равна

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t_i \leq s \leq t_{i+1}} W_s \geq a \mid W_{t_i} = x, W_{t_{i+1}} = y \right) = \exp \left(-\frac{2(a-x)(a-y)}{\Delta t} \right).$$

Это формула для **броуновского моста**, позволяющая корректировать ошибку дискретизации. Если хотя бы одна из конечных точек выше барьера, пересечение гарантировано.

Точно: 0.3173

Только узлы сетки: 0.2851

С поправкой броуновского моста: 0.3147

1.10 10. Дополнение: почему нельзя остановиться «в последний раз»?

Для фиксированного $T > 0$ рассмотрим $L = \sup\{s \leq T : W_s = 0\}$ — последний ноль перед T . Это случайное время зависит от будущего и **не является** моментом остановки относительно естественной фильтрации: в момент $t < T$ нельзя знать, вернётся ли траектория к нулю позднее.

Сравните с первым достижением уровня: τ_a можно обнаружить в момент его наступления.



1.11 11. Дополнение: приложения

i Финансы: барьерные опционы

В модели с логарифмической ценой, движущейся как броуновское движение с дрейфом, момент первого достижения ценового барьера определяет активацию или прекращение действия опциона. Принцип отражения лежит в основе явных формул при нулевом дрейфе.

i Физика: первое прохождение порога

В моделях диффузии τ_a — время, когда частица впервые достигает границы. Плотность первого достижения и её тяжёлый хвост объясняют высокую изменчивость времени ожидания.

i Машинное обучение и последовательный анализ

Пороговые правила остановки встречаются в последовательном тестировании гипотез, мониторинге изменений и online-алгоритмах. Важно отличать корректную остановку по доступным данным от выбора момента задним числом.

1.12 13. Краткая карта результатов

Понятие	Главный результат
Фильтрация	$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ при $s \leq t$
Марковский момент	$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$
Информация до остановки	$\mathcal{F}_\tau$
Строго марковское свойство	$W_{\tau+t} - W_\tau$ — новый независимый винеровский процесс
Отражение	$Z_t = W_t$ до τ , $Z_t = 2W_\tau - W_t$ после
Достижение уровня	$\{\tau_a \leq t\} = \{M_t \geq a\}$
Башелье	$M_t \stackrel{d}{=} W_t $
Дополнение	$f_{\tau_a}(t) = a(2\pi t^3)^{-1/2} e^{-a^2/(2t)}$

Источник: «Неделя 5. Марковские моменты» (6 страниц). Разделы, обозначенные «Дополнение», расширяют конспект лекции.