Неделя 6.Мартингалы

Carlos Buitrago

Table of contents

1 Определение мартингала **1**
1.1 2.1. Критерий для процессов с независимыми приращениями . . . 2
1.2 2.2. Примеры . . . 2
1.3 Эксперимент 1. Справедливая игра, дрейф и пуассоновская компенсация . . . 3

2 3. Выпуклые функции и субмартингалы **3**

3 4. Разложение Дуба (дискретное время) **4**
3.1 4.1. Дополнение: пример с зависящим от прошлого дрейфом . . . 5

4 5. Марковские моменты и остановленные процессы **5**

5 6. Теорема об остановке (дискретное время) **6**
5.1 6.1. Следствие из конспекта и полезные дополнения . . . 6
5.2 Эксперимент 2. Неограниченная остановка: где ломается интуиция . . . 7

6 7. Задача о разорении игрока **7**
6.1 7.1. Честная игра: $p = q = 1/2$ . . . 7
6.2 7.2. Нечестная игра: $p \neq q$ . . . 8
6.3 Эксперимент 3. Проверка формулы разорения методом Монте-Карло . . . 8
6.4 7.3. Дополнение: средняя длительность игры при $p = 1/2$ . . . 8

7 8. Непрерывное время: опциональные моменты **9**
7.1 8.1. Дополнение: мартингалы непрерывного времени . . . 10

8 9. Дополнение: почему «удвоение ставки» не опровергает теорему **10**

9 10. Практические применения (дополнения) **10**

10 12. Сводка ключевых формул **11**

> **i** Главная идея
>
> Мартингал — математическая модель *справедливой игры*: зная всю доступную информацию к моменту s, мы не можем предсказать систематическую прибыль или убыток к моменту $t > s$.

1 Определение мартингала

Пусть $X = (X_t)_{t \in T}$ — процесс, согласованный с $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, причём $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ для каждого t.

- **Мартингал:** $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ при $s \leq t$.
- **Субмартингал:** $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$.

- **Супермартингал:** $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \le X_s$.

Для дискретного времени достаточно проверить одношаговое условие

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n,$$

а затем применить свойство башни.

Следствие: для мартингала $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_0$; для субмартингала среднее не убывает, для супермартингала не возрастает.

`NumPy / Matplotlib / SciPy готовы`

1.1 2.1. Критерий для процессов с независимыми приращениями

Лемма (из конспекта). Если X имеет независимые приращения и $\mathbb{E}|X_t| < \infty$, то относительно естественной фильтрации

$$X \text{ — мартингал} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}X_t = \text{const}.$$

Доказательство. При $s < t$ приращение $X_t - X_s$ независимо от $\mathcal{F}_s^X$, поэтому

$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s^X) = X_s + \mathbb{E}(X_t - X_s).$$

Правая часть равна X_s тогда и только тогда, когда $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_s$. $\square$

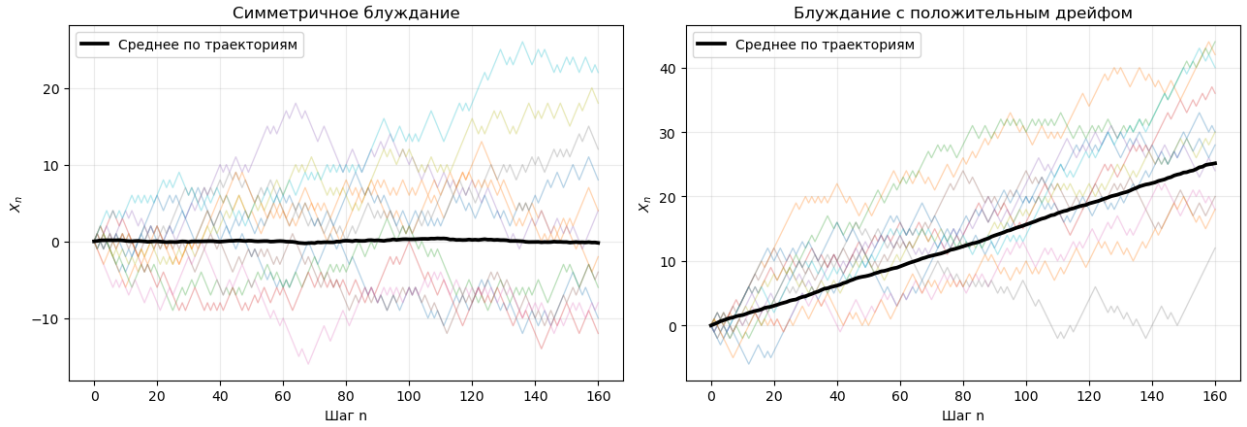
> ⚠ Важное уточнение
>
> Независимость приращений принципиальна: вообще говоря, равенство $\mathbb{E}X_t = \text{const}$ не обеспечивает мартингальность.

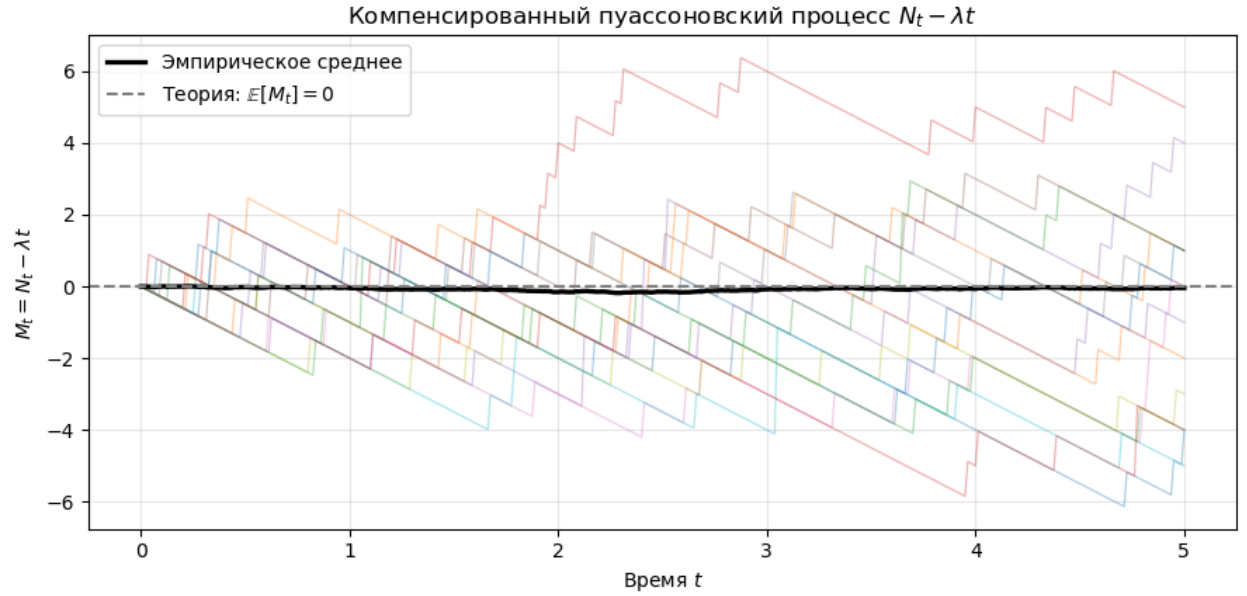
1.2 2.2. Примеры

1. **Винеровский процесс** W_t: $\mathbb{E}(W_t \mid \mathcal{F}_s^W) = W_s$.
2. **Случайное блуждание:** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ с независимыми интегрируемыми ξ_k — мартингал тогда и только тогда, когда $\mathbb{E}\xi_k = 0$ для каждого k.
3. **Пуассоновский процесс:** N_t интенсивности λ — субмартингал; $N_t - \lambda t$ — мартингал.
4. **Произведение:** $P_n = \prod_{k=1}^{n} \xi_k$, где независимые $\xi_k \ge 0$ и $\mathbb{E}\xi_k = 1$, — мартингал (если начальное произведение равно 1).
5. **Мартингал Леви:** $X_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$ для $\xi \in L^1$ — мартингал по свойству башни.

> ℹ Дополнение: типичные мартингалы броуновского движения
>
> $$W_t, \qquad W_t^2 - t, \qquad \exp\!\left(\theta W_t - \frac{\theta^2 t}{2}\right)$$
>
> — мартингалы относительно естественной фильтрации винеровского процесса. Для второго используйте $W_t = W_s + (W_t - W_s)$, для третьего — моментопорождающую функцию нормального распределения.

1.3 Эксперимент 1. Справедливая игра, дрейф и пуассоновская компенсация





2 3. Выпуклые функции и субмартингалы

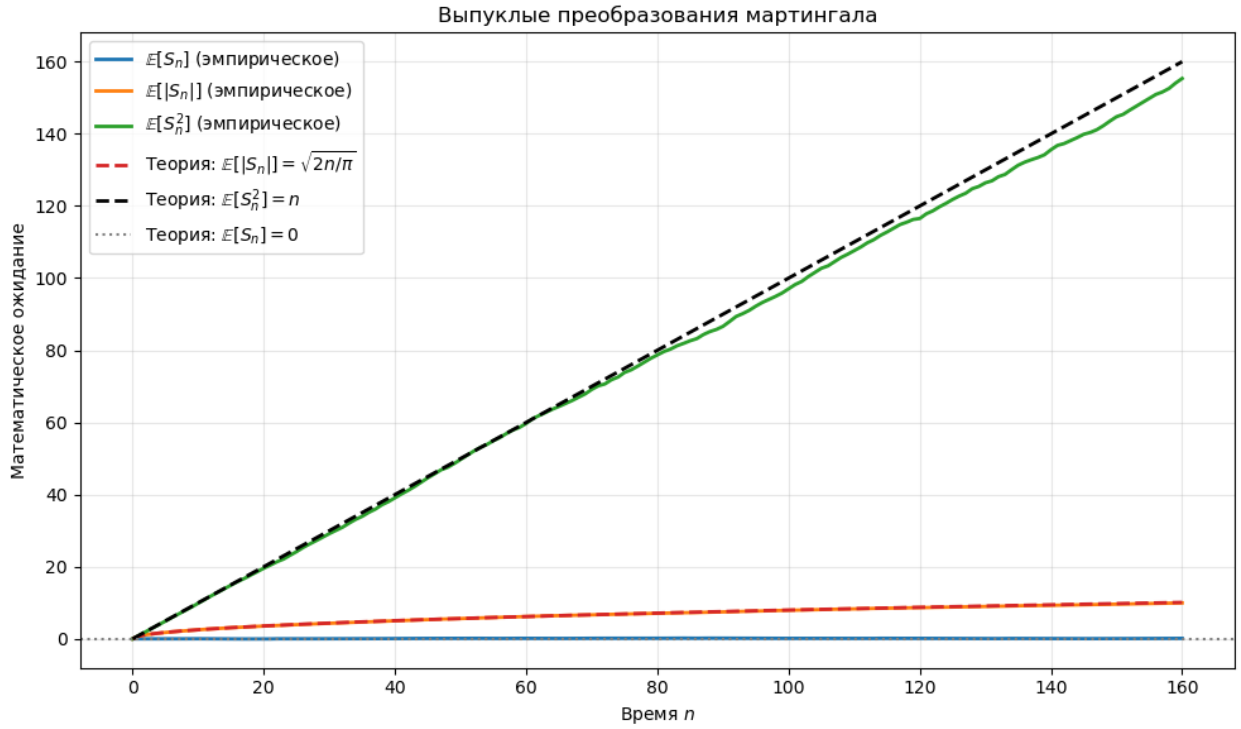
Утверждение (из конспекта). Если X — мартингал и $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выпукла, причём $h(X_t)$ интегрируема, то $h(X_t)$ — субмартингал.

Доказательство (условное неравенство Йенсена):

$$\mathbb{E}[h(X_t) \mid \mathcal{F}_s] \geq h(\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s]) = h(X_s). \qquad \square$$

Примеры (при соответствующей интегрируемости): $|X_t|$, X_t^2, $e^{\theta X_t}$.

Дополнение. Если X — субмартингал, а h выпукла и неубывает, то $h(X)$ — субмартингал (при интегрируемости). Для произвольной выпуклой h без монотонности это неверно.



3 4. Разложение Дуба (дискретное время)

Процесс A_n называется **предсказуемым**, если A_n измерим относительно $\mathcal{F}_{n-1}$ при $n \geq 1$.

Теорема (из конспекта). Для любого интегрируемого адаптированного процесса X_n, $n \geq 0$, существует единственное представление

$$\boxed{X_n = M_n + A_n, \qquad A_0 = 0,}$$

где M — мартингал, а A — предсказуемый процесс.

Формулы:

$$\boxed{A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}], \qquad M_n = X_n - A_n.}$$

Доказательство единственности. Если $X_n = M_n + A_n$, то

$$\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} + A_n = X_{n-1} - A_{n-1} + A_n.$$

Следовательно, $A_n - A_{n-1} = \mathbb{E}(\Delta X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$; при $A_0 = 0$ это однозначно определяет A, а значит, и M.

Доказательство существования. Зададим A приведённой формулой и положим $M = X - A$. Тогда

$$\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - A_n = X_{n-1} - A_{n-1} = M_{n-1}. \quad \square$$

Следствие: X — субмартингал тогда и только тогда, когда его предсказуемая часть A_n не убывает почти наверное.

3.1 4.1. Дополнение: пример с зависящим от прошлого дрейфом

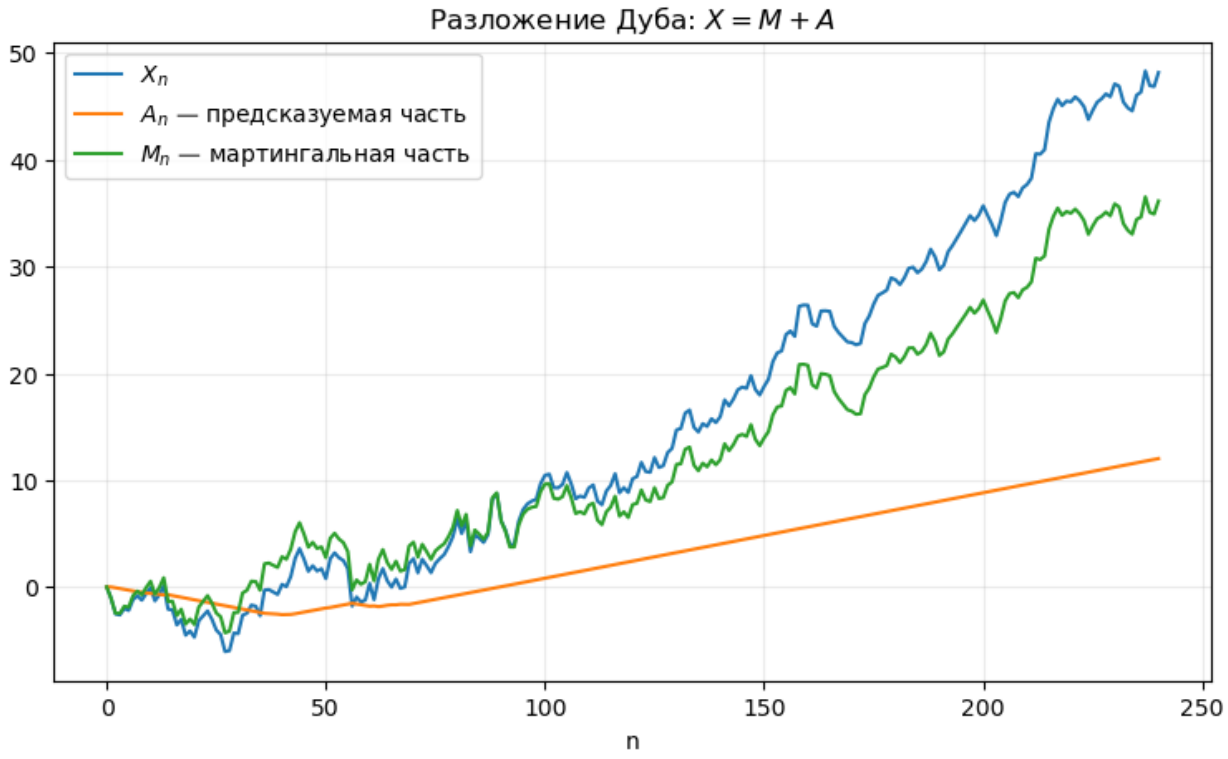
Пусть ξ_n — независимые стандартные нормальные величины, $X_0 = 0$ и

$$X_n = X_{n-1} + 0.08 \tanh(X_{n-1}) + \xi_n.$$

Тогда

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} 0.08 \tanh(X_{k-1}), \qquad M_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k.$$

Таким образом, A собирает **предсказуемую часть** приращений, а M — **непредсказуемый шум**.



4 5. Марковские моменты и остановленные процессы

Случайное время $\tau \in \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$ — **марковский момент** (stopping time), если $\{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n$ для всех n. В данном конспекте **моментом остановки** дополнительно называют конечный почти наверное марковский момент.

Остановленный процесс: $X_n^\tau = X_{n \wedge \tau}$.

> **i** Дополнение: почему остановленный мартингал остаётся мартингалом?
>
> При $n \ge 1$:
>
> $$X_{n\wedge\tau} - X_{(n-1)\wedge\tau} = \mathbf{1}_{\{\tau \ge n\}}(X_n - X_{n-1}).$$
>
> Индикатор $\{\tau \ge n\}$ измерим относительно $\mathcal{F}_{n-1}$, поэтому условное ожидание приращения равно нулю. Это утверждение для каждого фиксированного n **не означает автоматически** $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$ при неограниченном τ.

5 6. Теорема об остановке (дискретное время)

Теорема (из конспекта). Пусть X_n — интегрируемый адаптированный процесс. Тогда X является мартингалом (соответственно субмартингалом) тогда и только тогда, когда для любых **ограниченных** марковских моментов $\tau \leq \sigma$:

$$\boxed{\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_\sigma \quad (\text{соответственно } \leq).}$$

Доказательство, направление $\Rightarrow$. Для мартингала

$$X_\sigma - X_\tau = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau < k \leq \sigma\}}(X_k - X_{k-1}),$$

где $\sigma \leq m$. Индикатор $\{\tau < k \leq \sigma\}$ является $\mathcal{F}_{k-1}$-измеримым. Условное ожидание каждого слагаемого равно нулю; для субмартингала — неотрицательно.

Доказательство, направление $\Leftarrow$. Для $A \in \mathcal{F}_k$, $k < n$, положим $\tau_A = k$ на A и $\tau_A = n$ на A^c, а $\sigma = n$. Тогда

$$\mathbb{E}X_{\tau_A} \leq (=)\mathbb{E}X_n \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X_k \mathbf{1}_A] \leq (=)\mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_A].$$

Это для всех $A \in \mathcal{F}_k$ эквивалентно $X_k \leq (=)\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_k)$. $\square$

> ⚠ Нельзя забывать об ограниченности
>
> Для симметричного случайного блуждания S_n моменты $\tau_1 = \inf\{n : S_n = 1\}$ и $\tau_2 = \inf\{n : S_n = 2\}$ конечны почти наверное, но не ограничены: $\mathbb{E}S_{\tau_1} = 1$ и $\mathbb{E}S_{\tau_2} = 2$. Нельзя применять теорему к ним без дополнительных условий.

5.1 6.1. Следствие из конспекта и полезные дополнения

Если $\tau < \infty$ почти наверное и $|X_{n\wedge\tau}| \leq C$ для всех n, то по ограниченной остановке и теореме Лебега

$$\mathbb{E}X_\tau = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{n\wedge\tau} = \mathbb{E}X_0.$$

Дополнение. Вместо общей ограниченности можно требовать равномерную интегрируемость семейства $\{X_{n\wedge\tau} : n \geq 0\}$. Ещё одно достаточное условие: ограниченные приращения $|X_n - X_{n-1}| \leq C$ и $\mathbb{E}\tau < \infty$ (для мартингала).

Почему возникает ошибка? Почти наверное сходимость $X_{n\wedge\tau} \to X_\tau$ сама по себе не позволяет переставить предел и математическое ожидание.

5.2 Эксперимент 2. Неограниченная остановка: где ломается интуиция

```
Доля траекторий, достигших +1 к горизонту: 0.967
На достигших уровень траекториях конечное значение равно 1;
редкие, ещё не достигшие траектории компенсируют это отрицательными значениями.
```

6 7. Задача о разорении игрока

Игрок начинает с капитала x, $a < x < b$. На каждом шаге капитал увеличивается на 1 с вероятностью p и уменьшается на 1 с вероятностью $q = 1 - p$; $0 < p < 1$.

$$S_n = x + \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad \mathbb{P}(\xi_k = 1) = p, \quad \mathbb{P}(\xi_k = -1) = q.$$

Время завершения: $\tau = \inf\{n \geq 0 : S_n \in \{a, b\}\}$. Это конечный почти наверное момент остановки. Действительно, в каждом блоке из $b - a$ шагов вероятность монотонно дойти до границы не меньше $p^{b-a} + q^{b-a} > 0$.

6.1 7.1. Честная игра: $p = q = 1/2$

S_n — мартингал; $S_{n \wedge \tau}$ ограничен, поэтому $\mathbb{E}S_\tau = x$. Поскольку $S_\tau \in \{a, b\}$,

$$x = a\,\mathbb{P}(S_\tau = a) + b\,\mathbb{P}(S_\tau = b).$$

Отсюда

$$\boxed{\mathbb{P}(S_\tau = a) = \frac{b - x}{b - a}.}$$

6.2 7.2. Нечестная игра: $p \neq q$

Введём $r = q/p$. Процесс r^{S_n} — мартингал, поскольку

$$\mathbb{E}(r^{\xi_k}) = pr + qr^{-1} = q + p = 1.$$

Применив теорему об остановке к ограниченному $r^{S_{n\wedge\tau}}$, получаем

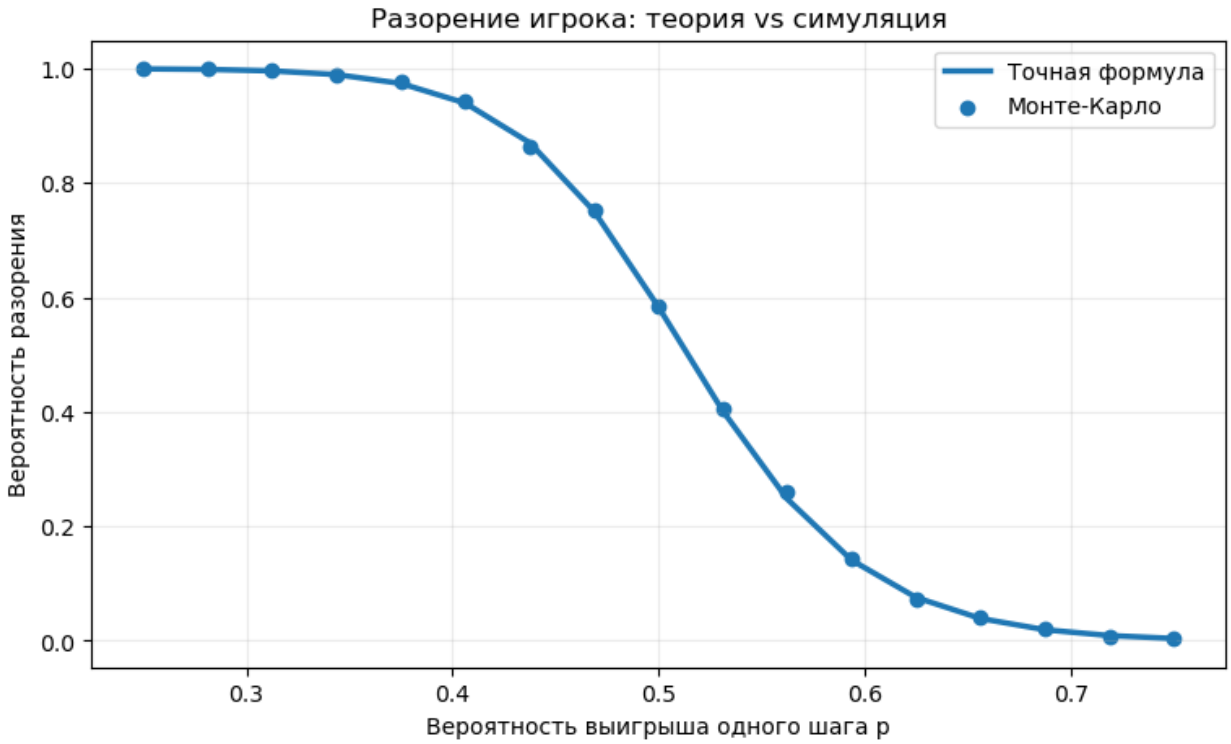
$$r^x = r^a\,\mathbb{P}(S_\tau = a) + r^b\,\mathbb{P}(S_\tau = b).$$

Следовательно,

$$\boxed{\mathbb{P}(S_\tau = a) = \frac{r^b - r^x}{r^b - r^a}, \qquad r = \frac{q}{p}.}$$

> **i** Дополнение: вероятность выигрыша
>
> $$\mathbb{P}(S_\tau = b) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & p = 1/2, \\ \dfrac{r^x - r^a}{r^b - r^a}, & p \neq 1/2. \end{cases}$$
>
> При $p \to 1/2$ формула для несимметричного случая непрерывно переходит в симметричную (например, по правилу Лопиталя).

6.3 Эксперимент 3. Проверка формулы разорения методом Монте-Карло



6.4 7.3. Дополнение: средняя длительность игры при $p = 1/2$

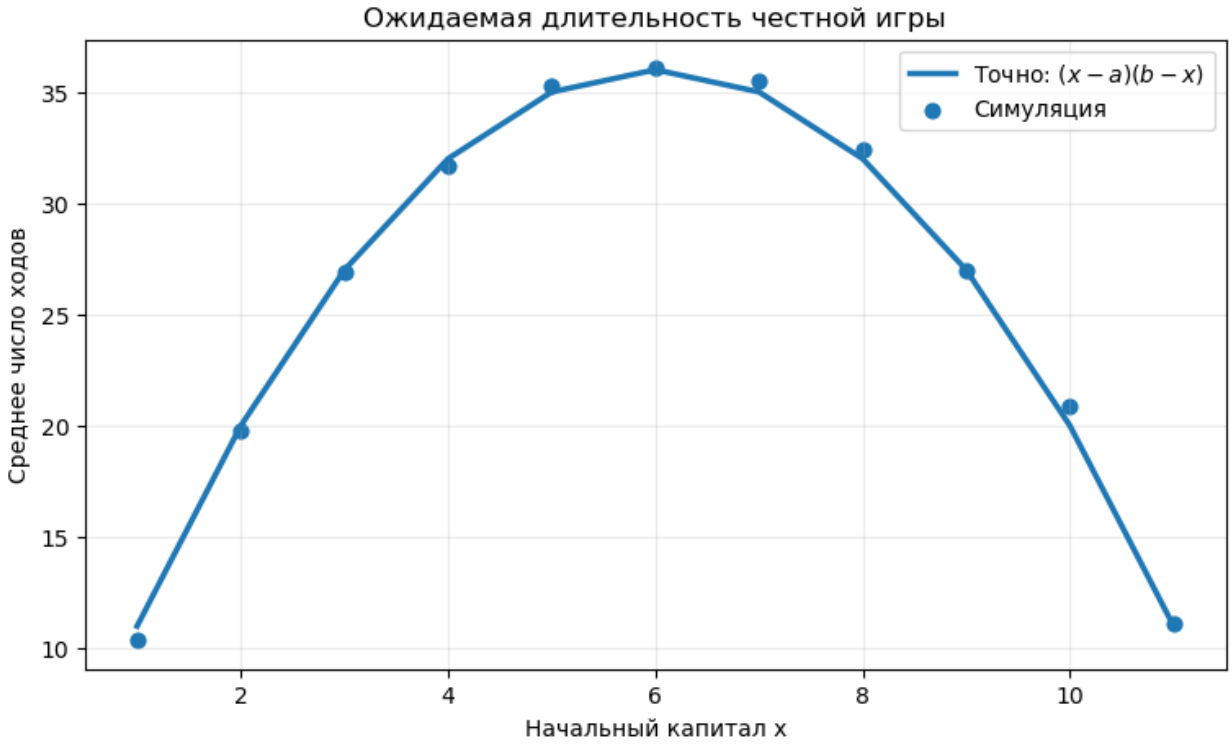
Процесс $S_n^2 - n$ — мартингал. При ограниченном капитале до остановки и конечном $\mathbb{E}\tau$ применяем остановку и предельный переход:

$$\mathbb{E}\tau = \mathbb{E}(S_\tau^2) - x^2.$$

Подставляя вероятности достижения границ,

$$\boxed{\mathbb{E}\tau = (x-a)(b-x).}$$

Почему $\mathbb{E}\tau < \infty$? Вероятность не закончить игру за каждый блок из $b-a$ шагов ограничена сверху числом $1 - p^{b-a} - q^{b-a} < 1$; значит, хвост τ убывает геометрически по блокам.



7 8. Непрерывное время: опциональные моменты

Определение (из конспекта). Случайное время $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ называется **опциональным моментом**, если

$$\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

Пример из конспекта: для процесса X с непрерывными справа траекториями и открытого $G \subseteq \mathbb{R}$ время $\tau = \inf\{t : X_t \in G\}$ является опциональным моментом относительно естественной фильтрации.

Теорема (из конспекта, без доказательства). Если X — мартингал с непрерывными справа траекториями, а $\tau \leq \sigma$ — ограниченные опциональные моменты, то

$$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_\sigma.$$

> ⚠ Терминологическое уточнение
>
> В литературе чаще используют условие $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для *stopping time*. В конспекте условие с $<$ называется «опциональным моментом». При правой непрерывности фильтрации эти условия эквивалентны; без дополнительных условий различие важно.

7.1 8.1. Дополнение: мартингалы непрерывного времени

Для броуновского движения W_t:

$$\mathbb{E}(W_t \mid \mathcal{F}_s) = W_s,$$
$$\mathbb{E}(W_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s) = W_s^2 - s,$$
$$\mathbb{E}\left[e^{\theta W_t - \theta^2 t/2} \mid \mathcal{F}_s\right] = e^{\theta W_s - \theta^2 s/2}.$$

Интерпретация: W_t^2 растёт в среднем со скоростью 1, и вычитание t компенсирует этот предсказуемый рост.

8 9. Дополнение: почему «удвоение ставки» не опровергает теорему

Представим честные независимые броски монеты: проиграв, игрок удваивает ставку, пока не выиграет. Формально выигрыш $+1$ достигается почти наверное, но для применения теоремы об остановке к *неограниченному* времени нужны дополнительные условия. Ставки и потенциальные потери неограниченны; равномерная интегрируемость отсутствует.

Вывод: «мартингал» не означает «невозможно выиграть почти наверное», а означает отсутствие положительного условного ожидаемого приращения при фиксированном времени. Условия остановки нельзя опускать.

9 10. Практические применения (дополнения)

> ℹ Финансы: справедливая цена и отсутствие арбитража
>
> В идеализированных моделях без арбитража **дисконтированная** цена актива является мартингалом *при риск-нейтральной мере*, а не обязательно при реальной вероятностной мере. В биномиальной модели это позволяет оценивать производные инструменты обратной индукцией условных ожиданий.

Машинное обучение: последовательное прогнозирование

Разность между наблюдением и его условным прогнозом $D_n = Y_n - \mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$ образует последовательность мартингальных разностей: $\mathbb{E}(D_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0$. Это полезно в онлайн-обучении и анализе адаптивно собранных данных.

Статистика: последовательное тестирование

Неотрицательные тестовые мартингалы и супер-мартингалы позволяют контролировать вероятность ложной тревоги при многократном просмотре данных. Например, неравенство Вилля: если $M_0 = 1$ и $M_n \geq 0$ — супермартингал, то $\mathbb{P}(\sup_n M_n \geq 1/\alpha) \leq \alpha$.

Биология и физика

Симметричное случайное блуждание — простая модель диффузии, а компенсированный пуассоновский процесс отделяет случайные флуктуации от средней интенсивности событий (например, импульсов детектора).

10 12. Сводка ключевых формул

Объект	Формула
Мартингал	$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$
Субмартингал	$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$
Разложение Дуба	$X_n = M_n + A_n$
Предсказуемая часть	$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1})$
Ограниченная остановка	$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_\sigma$ при $\tau \leq \sigma$
Разорение, $p = 1/2$	$\mathbb{P}(S_\tau = a) = (b-x)/(b-a)$
Разорение, $p \neq 1/2$	$\mathbb{P}(S_\tau = a) = (r^b - r^x)/(r^b - r^a)$, $r = q/p$
Средняя длительность, $p = 1/2$	$\mathbb{E}\tau = (x-a)(b-x)$

Что нужно уметь: проверять условное ожидание, распознавать предсказуемую компенсацию, выбирать подходящий мартингал и проверять условия теоремы об остановке.