Случайное блуждание.

1. Найдите $\mathsf{P}(S_n = x)$.

2. Найдите вероятность того, что симметричное случайное блуждание никогда не возвратится в 0, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0)$.

3. **(Лемма о баллотировке)**

   (a) В выборах участвовали два кандидата. Мы уже заранее знаем, что кандидат X получит на этих выборах a голосов, а кандидат Y — b голосов, где $a > b$. Какова вероятность, что кандидат X будет лидировать в течение всего подсчёта голосов? (Предполагается, что голоса считают в случайном порядке).

   (b) Доля путей из $(0,0)$ в (n,x), которые не пересекают нулевой уровень, от общего числа путей из $(0,0)$ в (n,x) составляет $\frac{x}{n}$.

4. Пусть $(S_n; n \in \mathbb{N})$ — симметричное случайное блуждание на прямой, $M_n = \max\limits_{k\leq n} S_k$. Используя принцип отражения, докажите, что

$$\mathsf{P}\left(M_n \geq N; S_n < N\right) = \mathsf{P}(S_n > N).$$

5. Пусть $(S_n; n \in \mathbb{N})$ — симметричное случайное блуждание на прямой.

   (a) Найдите распределение случайной величины M_n.

   (b) Найдите асимптотику $\mathsf{E}M_n$ при $n \to \infty$.

6. Пусть $(S_n; n \in \mathbb{N})$ — случайное блуждание с вероятностью шага вправо p и шага влево q, $p + q = 1$. Докажите, что для $m \leq N$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(\max_{k\leq n} S_k \geq N; S_n = m\right) = C_n^u p^v q^{n-v},$$

   где $v = (n+m)/2, u = v - N$.

7. Пусть $(S_n, n \in \mathbb{N})$ — симметричное случайное блуждание на прямой. Докажите равенство

$$\mathsf{P}\left(\max_{k\leq n} S_k = N; S_n = m\right) = \mathsf{P}(S_n = 2N - m) - \mathsf{P}(S_n = 2N - m + 2)\,.$$

8. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\tau = \min\{n; S_n = k\}$ — первый момент пересечения уровня k простейшим симметричным случайным блужданием. Почему τ п.н. конечно? Найдите распределение τ и $\mathsf{E}\tau$.

9. Пусть $(S_n; n \in \mathbb{N})$ — простейшее симметричное случайное блуждание на прямой, а X_n — количество возвращений в 0 за первые n шагов. Найдите асимптотику $\mathsf{E}X_n$ и $\mathsf{D}X_n$.