Процессы с независимыми приращениями.

1. Пусть $(X_t,\ t \geq 0)$ — процесс восстановления, построенный по $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Верно ли, что процесс X_t всегда имеет независимые приращения?

2. Пусть $(N_t,\ t \geq 0)$ — пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$. Какие из перечисленных ниже случайных процессов имеют независимые приращения?

   (a) $X_t = N_t - N_1, \quad t \geq 0;$

   (b) $X_t = 3, \quad t \geq 0;$

   (c) $X_t = N_{t^2-t+1}, \quad t \geq 0;$

   (d) $X_t = N_t \bmod 2, \quad t \geq 0.$

3. Найдите функцию среднего и ковариационную функцию пуассоновского процесса $(N_t, t \geq 0)$.

4. Пусть $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ — процесс с независимыми приращениями. Докажите, что для любых $t > s$ случайная величина $X_t - X_s$ не зависит от $\sigma(X_u, u \leq s)$.

5. Пусть $(N_t, t \geq 0)$ — пуассоновский процесс интенсивности λ. Найдите предел п.н. N_t/t при $t \to +\infty$.

6. Пусть $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ — независимые экспоненциальные случайные величины с параметром λ, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, а $N = (N_t, t \geq 0)$ — процесс восстановления, построенный по ним (пуассоновский процесс интенсивности λ). Для каждого $t > 0$ обозначим $V_t = S_{N_t+1} - t$ (“перескок”) и $U_t = t - S_{N_t}$ (“недоскок”).

   (a) Вычислите вероятность $\mathbb{P}(V_t > v, U_t > u)$.

   (b) Докажите, что V_t и U_t — независимы и что $V_t \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

   (c) Вычислите функцию распределения U_t и $\mathbb{E}U_t$.

7. Задан процесс $Y_t = \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j,\ t \geq 0$, где $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ — независимые одинаково распределённые случайные величины, не зависящие также от пуассоновского процесса $N = \{N_t, t \geq 0\}$ интенсивности λ. Докажите, что процесс Y_t имеет независимые приращения.

8. Пусть $(N_t, t \geq 0)$ — пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$. Чему равна условная вероятность $\mathbb{P}(N_5 = 2, N_4 = 1 \mid N_2 = 1)$?

9. Пусть Y_n — момент n-ного скачка пуассоновского процесса $(N_t, t \geq 0)$ интенсивности $\lambda > 0$. Чему равно $\mathbb{E}Y_n$?

10. Пусть $(N_t, t \geq 0)$ — пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$. Чему равна ковариация $\mathrm{cov}(X_t, X_s)$, где процесс $(X_t, t \geq 0)$ равен $X_t = N_t - t\xi$, $t \geq 0$, а случайная величина ξ не зависит от $(N_t, t \geq 0)$ и $\mathrm{D}\xi = \lambda$?