

Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона.

1. Найдите вероятность вырождения ветвящегося случайного процесса с бернуллиевским $\text{Bern}(p)$ законом размножения частиц. Найдите производящую функцию числа частиц в n -м поколении ветвящегося процесса. Найдите распределение момента вырождения N этого процесса. Вычислите производящую функцию общего числа частиц в процессе, а также найдите вероятность того, что всего в процессе было ровно k частиц.
2. Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — ветвящийся процесс с законом размножения частиц ξ . Обозначим через $Y_n = X_n + \dots + X_0$ общее число частиц в процессе за время n , а через $\varphi_{Y_n}(z)$ — его производящую функцию. Докажите, что

$$\varphi_{Y_n}(z) = z \varphi_{\xi}(\varphi_{Y_{n-1}}(z)).$$

3. Пусть ξ — число потомков частицы в ветвящемся процессе Гальтона–Ватсона. Обозначим $E\xi = \mu$, $D\xi = \sigma^2$. Найдите EX_n .
4. Пусть Y — общее число частиц в процессе Гальтона–Ватсона. Верно ли, что $G_Y(1) = 1$?
5. Найдите производящую функцию числа частиц в n -м поколении ветвящегося процесса, если производящая функция числа потомков одной частицы равна (а) $pz + 1 - p$, (б) $(1 - p)/(1 - pz)$, (в) $1 - p(1 - z)^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.

6. Найдите вероятности вырождения для ветвящихся процессов с производящей функцией числа потомков одной частицы

(а) $1 - p(1 - z)^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$,

(б) $(1 + z + z^2 + z^3)/4$.

7. Найдите распределение момента вырождения N для ветвящихся процессов с производящей функцией числа потомков одной частицы $1 - p(1 - z)^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.
8. Ветвящийся процесс имеет следующий закон ξ распределения потомков одной частицы:

$$P(\xi = 0) = 1/4, \quad P(\xi = 2) = 1/2, \quad P(\xi = 6) = 1/4.$$

Верно ли, что вероятность вырождения будет принадлежать интервалу $(1/4, 1/3)$?

9. Пусть ξ — число потомков частицы в ветвящемся процессе Гальтона–Ватсона. Обозначим $E\xi = \mu$, $D\xi = \sigma^2$. Найдите DX_n .
10. Найдите вероятность вырождения ветвящегося случайного процесса с геометрическим $\text{Geom}(p)$ законом размножения частиц (т.е. $P(\xi = k) = p(1 - p)^k$, $k \in \mathbb{Z}_+$). Вычислите производящую функцию общего числа частиц в процессе, а также найдите вероятность того, что всего в процессе было ровно k частиц.
11. Пусть ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона построен по случайной величине ξ , имеющей производящую функцию $G(s) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1 - s}$. Найдите
 - (а) вероятность вырождения процесса;
 - (б) производящую функцию общего числа частиц процесса;
 - (в) вероятность того, что в процессе было всего 10 частиц.