Задачи к семинарам. Неделя 01

Теория. Случайные величины, функции распределения, дискретные и абсолютно непрерывные распределения, плотности, примеры распределений, независимость случайных величин.

Основные задачи.

1 Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$. Найдите плотность случайной величины ξ^2.

2 Случайная величина ξ имеет стандартное распределение Коши, т.е. плотность ξ равна

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найдите плотности распределения случайных величин (a) $\xi^2/(1+\xi^2)$, (b) $1/(1+\xi^2)$, (c) $2\xi/(1-\xi^2)$, (d) $1/\xi$.

3 Случайные величины ξ и η независимы. Пусть $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$ — их функции распределения. Положим $\zeta_1 = \max(\xi, \eta)$, $\zeta_2 = \min(\xi, \eta)$. Вычислите функции распределения случайных величин ζ_1 и ζ_2.

4 Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на $[0,1]$, а η — независимая с ней биномиальная случайная величина $\mathrm{Bin}(n,p)$. Найдите плотность случайной величины $\xi + \eta$.

Задачи для самостоятельного решения.

5 Случайная величина ξ принимает значения в интервале (a,b) и имеет плотность $f(x)$. Функция $\varphi(x)$ строго монотонна и дифференцируема на (a,b), причем $\varphi'(x) \neq 0$ на (a,b). Вычислите плотность случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$.

6 Случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\alpha > 0$. Найдите плотности распределения случайных величин (a) $\sqrt{\xi}$, (b) ξ^2, (c) $\frac{1}{\alpha}\ln\xi$, (d) $\{\xi\}$ — дробная доля ξ, (e) $1 - e^{-\alpha\xi}$.

7 Случайные величины ξ и η — независимы, ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\alpha > 0$, а η — пуассоновское с параметром $\lambda > 0$. Вычислите плотность случайной величины $\xi + \eta$.

8 Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные (т.е. их функции распределения равны) случайные величины с функцией распределения $F(x)$

и плотностью $f(x)$. Упорядочим значения $\xi_1, \ldots, \xi_n$ по неубыванию. Возникает новая последовательность случайных величин $\xi_{(1)} \leq \ldots \leq \xi_{(n)}$ (т.е. $\xi_{(k)}$ — k-я по порядку величина из $\xi_1, \ldots, \xi_n$). Найдите

(a) функцию распределения случайной величины $\xi_{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$.

(b) плотность случайной величины $\xi_{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$.