Задачи к семинарам. Неделя 02

Теория. Подсчет математических ожиданий функций от случайных величин с абсолютно-непрерывным распределением или распределением, представляющим смесь дискретного и абсолютно-непрерывного распределения.

Основные задачи.

1 Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, если

(a) $\xi \sim \mathrm{U}(a, b)$, равномерное распределение на отрезке (a, b);

(b) $\xi \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$, экспоненциальное распределение с параметром $\alpha > 0$;

(c) $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, нормальное распределение с параметрами (a, σ^2);

(d) $\xi \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, гамма распределение с параметрами $\alpha, \lambda > 0$.

2 В треугольнике со сторонами 3, 4 и 5 выбирается случайная точка X, после чего вычисляется случайная величина ξ — сумма длин высот, опущенных из X на стороны треугольника. Вычислите $\mathsf{E}\xi$.

3 Случайные величины X и Y независимы, X имеет экспоненциальное распределение с параметром 1, а Y — равномерное на $[0, 2]$. Случайная величина Z равна а) $Z = \max(X, Y)$, б) $Z = \min(X, Y, 1)$. Вычислите $\mathsf{E}Z$ и $\mathsf{D}Z$.

4 Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Положим Y_k — k-е по порядку значение из набора $X_1, \ldots, X_n$, $k = 1, \ldots, n$, (т.е. Y_1 — это минимальное значение, а Y_n — максимальное). Вычислите $\mathsf{E}Y_k$, $k = 1, \ldots, n$.

5 Пусть ξ — неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Докажите, что тогда

$$\mathsf{E}\xi = \int\limits_0^\infty (1 - F(x))dx.$$

Задачи для самостоятельного решения.

5 Пусть (ξ, η) — случайная точка из области $D \subset \mathbb{R}^2$. Найдите $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{E}\eta$, если

а) $D = \{(x, y) : y \geq 0, x \geq y, x + 2y \leq 3\}$ — треугольник,

б) $D = \{(x, y) : y \geq 0, (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ — полукруг.

6 Пусть (ξ, η) — случайная точка из области

$$D = \{(x, y) : x \geq 1,\ y \geq 1,\ xy \leq 2\}.$$

Вычислите плотность случайной величины $\zeta = \max(\xi, \eta)$ и $\mathsf{E}\zeta$.

7 Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, a]$. Положим

$$X_{(1)} = \min_{i=1,\ldots,n} X_i, \quad X_{(n)} = \max_{i=1,\ldots,n} X_i, \quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

а) Докажите, что случайные величины $(n+1)X_{(1)}$, $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$, $2\overline{X}$ имеют одно и тоже математическое ожидание, равное a.

б) Вычислите дисперсии случайных величин из пункта а) и укажите, чья дисперсия будет наименьшей.

8 Случайная величина ξ имеет следующую функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -3; \\ 1/10, & \text{если } -3 \leq x < -1; \\ (2 - x^4)/8, & \text{если } -1 \leq x < 0; \\ (x^2 + 1)/4, & \text{если } 0 \leq x < 1; \\ 1, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$$

Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.