

Задачи к семинарам. Неделя 04

Теория. Совместные распределения, формула свертки для плотности суммы независимых случайных величин.

Основные задачи.

- 1 Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найдите плотности случайных величин $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$.
- 2 Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и имеют экспоненциальное распределение, $\xi_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$, $i = 1, 2$. Вычислите плотности случайных величин $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ при условии, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
- 3 Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n — независимые $\text{Exp}(\lambda) > 0$. Вычислите плотность случайной величины $\xi_1 + \dots + \xi_n$.
- 4 Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и имеют нормальное распределение, $\xi_i \sim \mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$. Вычислите плотность случайной величины $\xi_1 + \xi_2$.

Задачи для самостоятельного решения.

- 5 Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найдите плотность случайной величины $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$.
- 6 Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и имеют гамма распределение, $\xi_i \sim \Gamma(\alpha, \lambda_i)$, $i = 1, 2$. Вычислите плотность случайной величины $\xi_1 + \xi_2$.
- 7 Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы и имеют одинаковое распределение $\mathcal{N}(0, 1)$. Найдите плотность случайной величины $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ (такое распределение называется распределением хи-квадрат с n степенями свободы).
- 8 Случайные величины X и Y независимы, X имеет плотность

$$p(x) = (2x)\mathbb{I}\{x \in [0, 1]\},$$

а Y — распределение Лапласа с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Вычислите плотность случайной величины $Z = Y - X$.