Задачи к семинарам. Неделя 04

Теория. Случайные векторы, совместные распределения, совместные плотности. Подсчет многомерных вероятностей и математических ожиданий функций от случайных векторов.

Основные задачи.

1 Пусть X, Y — независимые случайные величины, $X \sim \mathrm{U}(0,2)$, $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$. Найдите $\mathsf{P}(X > Y)$.

2 Случайные величины X, Y независимы, X имеет распределение $\mathrm{U}(0,2)$, а Y — экспоненциальное с параметром 1. Найдите вероятность того, что существует треугольник с длинами сторон $X, Y, 1$.

3 Пусть (X, Y) — случайная точка в области

$$D = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}.$$

Вычислите $cov(X, Y)$.

4 Случайный вектор (ξ, η) имеет плотность

$$p_{(\xi,\eta)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{x^2-2xyr+y^2}{2(1-r^2)}},$$

где $|r| < 1$. Вычислите $\mathsf{D}\xi$, $\mathsf{D}\eta$ и $cov(\xi, \eta)$.

Задачи для самостоятельного решения.

5 Случайные величины ξ и η независимы и имеют распределение $\mathcal{N}(0,1)$. Вычислите $\mathsf{E}e^{\frac{XY}{2}}$.

6 Борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$ определяется как минимальная σ-алгебра, содержащая все прямоугольники с борелевскими сторонами:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\left(B_1 \times \ldots \times B_n : B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right).$$

Докажите, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ может быть определена следующим образом:

а)
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\left((a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) : a_i < b_i\right);$$

б)
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\left(G :\ G \text{ — открытое множество в } \mathbb{R}^n\right).$$

7 Случайные величины X и Y независимы, $X \sim U(1,2)$, а Y имеет плотность $p(x) = 2x\mathrm{I}\{x \in (0,1)\}$. Вычислите совместную плотность случайных величин X^2 и Y/X.

8 Студент Иванов считает проходящие электрички, стоя на станции. Первая электричка после появления Иванова на станции приходит через случайное время, имеющее распределение $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. И каждая следующая приходит после предыдущей через независимое случайное время, также имеющее экспоненциальное распределение $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Случайная величина X_T равна числу электричек, которые успели проехать к моменту времени T мимо Иванова. Для заданного $T > 0$ найдите распределение случайной величины X_T.