

Задачи к семинарам. Неделя 05

Теория. Вычисление распределений функций от случайных векторов.

Основные задачи.

- 1 Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найдите плотности случайных величин $\xi_1\xi_2$ и ξ_1/ξ_2 .
- 2 Случайные величины X и Y независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром λ . Положим $U = X + Y$, $V = X/(X + Y)$. Найдите совместную плотность случайных величин U и V . Проверьте, являются ли U и V независимыми.
- 3 Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы и одинаково распределены с распределением $U(0, 1)$. Найдите совместную плотность случайных величин

$$\xi_{(1)} = \min\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \text{ и } \xi_{(n)} = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}.$$

Вычислите $\text{cov}(\xi_{(1)}, \xi_{(n)})$.

- 4 Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$ и плотностью $f(x)$. Упорядочим значения ξ_1, \dots, ξ_n по неубыванию. Возникает новая последовательность случайных величин $\xi_{(1)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$. Найдите плотность случайного вектора $(\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(n)})$.

Задачи для самостоятельного решения.

- 5 Случайные величины X, Y, Z — независимые с равномерным распределением на $[0, 1]$. Вычислите плотность случайной величины $W = (XY)^Z$.
- 6 Пусть случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы. Найдите плотность случайной величины ξ_1/ξ_2 , если
 - (a) $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$;
 - (b) $\xi_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$.
- 7 Случайные величины X, Y независимы, X имеет равномерное распределение на отрезке $[1, 5]$, Y имеет плотность $p_Y(y) = y^{-2}\mathbf{I}\{y > 1\}$. Найдите плотность случайной величины Y/X .
- 8 Пусть X и Y — независимые $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины. Докажите, что вектор $\left(\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)$ имеет равномерное распределение на единичной окружности.