Задачи к семинарам. Неделя 07

Теория. Условное математическое ожидание случайной величины относительно сигма-алгебры и относительно другой случайной величины/вектора. Основные свойства условного математического ожидания.

Основные задачи.

1 Пусть X — число очков, выпадающее при случайном броске 6-гранного кубика. Вычислите $\mathsf{E}(X|(X-2)^2)$.

2 Пусть ν — пуассоновская случайная величина с параметром λ. Проводится ν испытаний Бернулли, вероятность успеха в которых постоянна, равна p и не зависит от ν. Пусть X — это число успехов, Y — число неудач.

а) Покажите, что X и Y независимы.

б) Найдите $\mathsf{E}(\nu|X)$ и $\mathsf{E}(X|\nu)$.

3 Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием. Найдите $\mathsf{E}(X_1|\sum_{i=1}^n X_i)$.

4 Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$. Вычислите $\mathsf{E}(X|X^2)$.

5 Пусть ξ — случайная величина с конечным математическим ожиданием. Докажите, что если для некоторой σ-алгебры $\mathcal{C}$ выполнено $\xi \leq \mathsf{E}(\xi|\mathcal{C})$ п.н., то $\xi = \mathsf{E}(\xi|\mathcal{C})$ п.н.

Задачи для самостоятельного решения.

6 Условной дисперсией случайной величины ξ относительно сигма-алгебры $\mathcal{C}$ называется (по аналогии с обычной дисперсией)

$$\mathsf{D}(\xi|\mathcal{C}) = \mathsf{E}\left((\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{C}))^2 \,|\mathcal{C}\right).$$

Докажите, что

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{E}\mathsf{D}(\xi|\mathcal{C}) + \mathsf{D}\mathsf{E}(\xi|\mathcal{C}).$$

7 Пусть случайные величины X и Y имеют конечные математические ожидания. Докажите, что если выполнены неравенства

$$\mathsf{E}(X|Y) \geq Y, \quad \mathsf{E}(Y|X) \geq X,$$

то $X = Y$ п.н.

8 Пусть ξ — случайная величина с конечным вторым моментом, а $\mathcal{C}$ — сигма-алгебра событий. Обозначим через F множество всех $\mathcal{C}$-измеримых случайных величин с конечным вторым моментом. Докажите, что

$$\mathsf{E}(\xi|\mathcal{C}) = \arg\min_{\eta \in F} \mathsf{E}(\xi - \eta)^2.$$

9 Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$, τ — независимые случайные величины. Пусть τ принимает значения $1, \ldots, n$, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — одинаково распределены и имеют конечную дисперсию. Обозначим $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$. Докажите, что

$$\mathsf{E}(S_\tau|\tau) = \mathsf{E}\xi_1 \cdot \tau, \quad \mathsf{D}(S_\tau|\tau) = \mathsf{D}\xi_1 \cdot \tau.$$