Задачи к семинарам. Неделя 08

Теория. Условное распределение одной случайной величины относительно другой, вычисление условного математического ожидания сс помощью условного распределения. Условная плотность, ее нахождение с помощью совместного распределения. Вычисление $\mathsf{E}(f(X,Y)|Y)$ при независимых X и Y.

Основные задачи.

1 Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение, $X, Y \sim \mathrm{U}(0,1)$. Вычислите условные математические ожидания:

а) $\mathsf{E}(X|YX)$;

б) $\mathsf{E}(X|Y/X)$;

в) $\mathsf{E}(X^2|Y+X)$.

2 Пусть X и Y — независимые случайные величины, X имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, а Y — экспоненциальное с параметром 1. Найдите $\mathsf{E}(YX^2|X/Y)$.

3 Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на отрезке $[0,1]$. Обозначим $X_{(1)} = \min\limits_{i=1,\ldots,n} X_i$ и $X_{(n)} = \max\limits_{i=1,\ldots,n} X_i$. Найдите

а) $\mathsf{E}(X_1|X_{(1)})$,

б) $\mathsf{E}(X_1|X_{(n)})$,

в) $\mathsf{E}(\sqrt{X_1X_2}|X_{(n)})$.

4 Пусть X и Y — независимые случайные величины, X имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, а Y — экспоненциальное с параметром 2. Вычислите $\mathsf{E}(e^{XY}|X)$.

Задачи для самостоятельного решения.

5 Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с экспоненциальным распределением $\mathrm{Exp}(1)$. Обозначим $S_j = X_1 + \ldots + X_j$, $j = 1, \ldots, n$. Найдите условную плотность вектора $(S_1, \ldots, S_{n-1})$ относительно S_n. Вычислите

$$\mathsf{E}\left(\frac{S_j}{S_n}\middle| S_n\right), \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

6 Случайные величины X и Y независимы, $X \sim \mathrm{U}(0,1)$, а Y имеет плотность $p(x) = 4x^3 \cdot \mathrm{I}\{x \in (0,1)\}$. Вычислите $\mathsf{E}(XY|Y/X)$.

7 Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с экспоненциальным распределением с параметром 1. Вычислите $\mathsf{E}(X_1 X_2 | X_{(1)})$, где $X_{(1)} = \min\limits_{i=1,\ldots,n} X_i$.

8 Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины. Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n = 1, 2, 3$. Докажите, что для любых $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ выполнено

$$\mathsf{P}(S_1 \in B_1, S_3 \in B_2 | S_2 = s) = \mathsf{P}(S_1 \in B_1 | S_2 = s) \cdot \mathsf{P}(S_3 \in B_2 | S_2 = s).$$