Задачи к семинарам. Неделя 09

Теория. Сходимости случайных величин. Закон больших чисел. Лемма Бореля–Кантелли.

Основные задачи.

1 а) Приведите пример такой последовательности случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, что $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, но $\xi_n \overset{\mathsf{P}}{\nrightarrow} \xi$..

б) Пусть последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходится по распределению к константе C. Докажите, что тогда $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} C$.

2 Пусть случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ независимы и $\xi_n \sim \mathrm{Bin}(1, p_n)$. Докажите, что

а)

$$\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \iff p_n \to 0.$$

б)

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \iff \sum_n p_n < +\infty.$$

3 Случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ независимы в совокупности. Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Пусть случайная величина ξ_n

а) принимает три значения $\{-n, 0, n\}$ с вероятностями $(\frac{1}{2n^{3/2}}, 1 - \frac{1}{n^{3/2}}, \frac{1}{2n^{3/2}})$;

б) принимает три значения $\{-2^n, 0, 2^n\}$ с вероятностями $(2^{-n-1}, 1-2^{-n}, 2^{-n-1})$.

Выясните, в каком случае выполнен закон больших чисел

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \text{ при } n \to \infty?$$

4 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — бесконечная схема Бернулли, т.е. независимые одинаково распределенные случайные величины

$$\mathsf{P}(\xi_n = 1) = \mathsf{P}(\xi_n = 0) = 1/2.$$

Введем события

$$A_n = \{\xi_n = 1, \xi_{n+1} = 1, \ldots, \xi_{n+\lceil \log_2 \log_2 n \rceil} = 1\},$$

$$B_n = \{\xi_n = 1, \xi_{n+1} = 1, \ldots, \xi_{n+\lceil \log_2 n \rceil} = 1\}.$$

Найдите вероятности $\mathsf{P}(A_n \text{ б.ч.})$, $\mathsf{P}(B_n \text{ б.ч.})$.

Задачи для самостоятельного решения.

6 Пусть случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ и ξ_n принимают значения только во множестве целых чисел $\mathbb{Z}$. Докажите, что в этом случае $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ тогда и только тогда, когда для любого $m \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$\mathsf{P}(\xi_n = m) \longrightarrow \mathsf{P}(\xi = m)$$

при $n \to \infty$.

7 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — бесконечная схема Бернулли с постоянной вероятностью успеха испытания p. Рассмотрим другую последовательность случайных величин:

$$\eta_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_n = \xi_{n+1} = 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажите, что выполнен закон больших чисел для $S_n = \eta_1 + \ldots + \eta_n$:

$$\frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \text{ при } n \to \infty.$$

8 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые случайные величины со следующим распределением:

$$\mathsf{P}(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \ln n}, \quad \mathsf{P}(\xi_n = \pm n) = \frac{1}{2n \ln n}.$$

Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Докажите, что последовательность S_n/n имеет предел сходимости по вероятности, но не имеет предела сходимости п.н.

9 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность независимых случайных величин. Известно, что $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$. Докажите, что найдется такое $a \in \mathbb{R}$, что $\xi = a$ п.н.

10 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — произвольная последовательность случайных величин. Докажите, что найдется такая неслучайная последовательность чисел $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, что $\xi_n / a_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$.