Задачи к семинарам. Неделя 11

Теория. Метод характеристических функций, теорема непрерывности. Центральная предельная теорема. Верхние пределы случайных величин. Сходимости случайных векторов. Лемма Слуцкого и теорема о наследовании сходимости.

Основные задачи.

1 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — нормальные случайные величины. Докажите, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то ξ — тоже нормальная случайная величина (может быть, вырожденная).

2 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые о.р.с.в. с конечной дисперсией. Докажите, что для любого $x \in \mathbb{R}$ существует предел

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{P}\left(\xi_1 + \ldots + \xi_n \le x\right)$$

и он равен 0, 1 или 1/2. Укажите условия, при которых получится каждое из значений.

3 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые случайные величины. Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что для любых $x \in \mathbb{R}$ и $\alpha > 0$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{n^\alpha} \le x\right) \in \{0, 1\}.$$

4 Докажите, что для сходимости почти наверное и по вероятности векторная сходимость эквивалентна соответствующим сходимостям компонент: если $\xi = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)}),\ \xi_n = (\xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$, то

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \iff \forall i = 1, \ldots, m\ \ \xi_n^{(i)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi^{(i)},$$

$$\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi \iff \forall i = 1, \ldots, m\ \ \xi_n^{(i)} \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi^{(i)}.$$

5 а) Докажите, что для сходимости по распределению векторная сходимость влечет сходимость компонент: если $\xi = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)}),\ \xi_n = (\xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$, то

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \implies \forall i = 1, \ldots, m\ \ \xi_n^{(i)} \xrightarrow{d} \xi^{(i)},$$

б) Приведите пример такой последовательности случайных векторов $\{(\xi_n, \eta_n), n \in \mathbb{N}\}$ и таких случайных величин ξ и η, что $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$, но

$$(\xi_n, \eta_n) \overset{d}{\nrightarrow} (\xi, \eta).$$

6 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые о.р.с.в., $\mathsf{E}\xi_1 = a \neq 0$, $\mathsf{D}\xi_1 \in (0, +\infty)$. Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Найдите предел сходимости по распределению у последовательности

$$\sqrt{n}\left(\frac{n}{S_n} - \frac{1}{a}\right).$$

Задачи для самостоятельного решения.

7 Пусть $\xi_n \sim \mathrm{Pois}(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что если $\lambda_n \to \infty$, то

$$\frac{\xi_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

8 Пусть $\xi_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что если $p = p(n) \to 0$, но $np \to \infty$, то

$$\frac{\xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

9 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые стандартные нормальные случайные величины. Докажите, что

$$\mathsf{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{\sqrt{2\ln n}} = 1\right) = 1.$$

10 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые пуассоновские случайные величины с параметром λ. Докажите, что

$$\mathsf{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\xi_n \ln\ln n}{\ln n} = 1\right) = 1.$$

Чему с вероятностью 1 равен

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\xi_n \ln\ln n}{\ln n}?$$