Задачи к семинарам. Неделя 12

Теория. Сходимости случайных векторов. Лемма Слуцкого и теорема о наследовании сходимости.

Основные задачи.

1 Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Рассмотрим $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i|$, $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ и $T_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Z_n / Y_n$. Найдите предел сходимости по распределению у последовательности

$$\sqrt{n}\,(T_n - \sigma)\,.$$

2 Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ — случайные величины, а $h(x)$ — функция, m раз дифференцируемая в точке $a \in \mathbb{R}$. Известно, что $h^{(i)}(a) = 0$, $i = 1, \ldots, m-1$. Найдите предел сходимости по распределению у последовательности

$$\frac{h(a + b_n \xi_n) - h(a)}{b_n^m},$$

где $b_n \to 0$ — произвольная последовательность положительных чисел.

3 Случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ независимы и имеют распределение Лапласа с плотностью

$$p(x) = \frac{\sigma}{2} e^{-\sigma|x|},$$

$\sigma > 0$. Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Найдите предел сходимости по распределению у последовательности

$$n \cdot \left(\cos\left(\frac{S_n}{n}\right) - 1\right).$$

4 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ и $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$ — две последовательности случайных величин, причем для каждого $n \geq 1$ величины ξ_n и η_n независимы. Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \eta$. Докажите, что ξ и η — тоже независимы.

5 Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые одинаково распределенные невырожденные случайные величины с конечным вторым моментом. Пусть $\mathsf{E}\xi_i = a$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Докажите, что у выражения

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right)$$

не существует предела сходимости по вероятности.

Задачи для самостоятельного решения.

6 Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Рассмотрим $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Найдите такие $a(\lambda)$ и $\sigma^2(\lambda) > 0$, что выполнено

$$\sqrt{n}(Y_n \sin Y_n - a(\lambda)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\lambda)) \text{ при } n \to \infty.$$

7 Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ — случайные векторы размерности m, а $h(x_1, \ldots, x_m)$ — функция m переменных, дифференцируемая в точке $a \in \mathbb{R}^m$. Найдите предел сходимости по распределению для выражения

$$\frac{h(a + b_n\xi_n) - h(a)}{b_n},$$

где $b_n \to 0$ — произвольная последовательность положительных чисел.

8 Случайные величины $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые случайные величины, имеющие распределение Лапласа с плотностью $p_\theta(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}$. Положим $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ и введем

$$Y_n = \begin{cases} \overline{X}, & \text{если } |\overline{X}| > n^{-1/4}; \\ \frac{1}{3}\overline{X}, & \text{если } |\overline{X}| \leqslant n^{-1/4}. \end{cases}$$

Для каждого $\theta \in \mathbb{R}$ найдите предел по распределению у последовательности

$$\sqrt{n}\left(Y_n - \theta\right).$$