Задачи к семинарам. Неделя 13

Теория. Гауссовские векторы, основные свойства гауссовских векторов. Многомерная центральная предельная теорема.

Основные задачи.

1 Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$ — гауссовский вектор. Вычислите распределение его линейного преобразования $\eta = C\xi + b$. Отдельно рассмотрите случай, когда $\Sigma = \sigma^2 \cdot I_n$ (I_n — единичная матрица размера $n \times n$), а C — ортогональная матрица.

2 Пусть X, Y — независимые случайные величины, $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\mathsf{P}(Y = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Положим $Z = XY$. Докажите, что вектор (X, Z) не является гауссовским, но его компоненты — нормальные случайные величины.

3 Пусть $(\xi, \eta) \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$ — двумерный гауссовский вектор. Докажите, что существует такое разложение $\xi = \xi_1 + \xi_2$, что ξ_1 независима с η, а ξ_2 является функцией от η. Найдите $\mathsf{E}(\xi | \eta)$.

4 Пусть (X, Y) — гауссовский вектор, $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, где

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите $\mathsf{E}(X^3 Y)$ и $\mathsf{E}(Y e^X)$.

5 Пусть $(X_1, \ldots, X_n)$ — независимые $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ случайные величины. Обозначим $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Докажите, что $\overline{X}$ независима с вектором

$$(X_1 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X}).$$

Задачи для самостоятельного решения.

6 Пусть (X, Y, Z) — гауссовский вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите

а) плотность случайного вектора $(X - Y, X + 2Z)$;

б) значения $a, b, c \in \mathbb{R}$, при которых $X - aY - bZ$, $Y - cZ$ и Z являются независимыми;

в) $\mathsf{E}(e^X | Y, Z)$.

7 Случайные величины X и Y — независимые нормальные с параметрами $(0,1)$. Докажите, что распределение случайной величины

$$Z = (X+a)^2 + (Y+b)^2$$

зависит только лишь от величины $r = \sqrt{a^2+b^2}$ (т.е. при фиксированном $r > 0$ оно будет одно и то же для любых a, b с условием $a^2+b^2 = r^2$).

8 Пусть (X,Y) — гауссовский вектор, а $h(x)$ — ограниченная гладкая функция. Докажите, что

$$cov(h(X),Y) = \mathsf{E}h'(X) \cdot cov(X,Y).$$

9 Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с распределением Лапласа с параметром σ, имеющего плотность

$$p(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}.$$

Рассмотрим $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i|$, $Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$. Найдите предел по распределению для выражения

$$\sqrt{n}\,(T - \sigma)\,,$$

где $T = Z^2/(4Y^3)$.