Программа курса “Теория вероятностей”

лектор — профессор Д. А. Шабанов

ФПМИ, весна 2026

1. Аксиоматика Колмогорова, вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Основные свойства вероятностной меры (напоминание, б/д). Борелевские σ-алгебры в $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\infty$.

2. Функция распределения вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, ее основные свойства. Теорема о взаимно-однозначном соответствии функций распределения и вероятностных мер на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (б/д). Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой. Основные примеры распределений разных видов. Теорема Лебега о разложении произвольной функции распределения (б/д).

3. Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Многомерная функция распределения, ее основные свойства. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ по функции распределения (б/д). Примеры многомерных функций распределения, плотность многомерного распределения. Согласованные семейства распределений. Теорема Колмогорова о продолжении меры на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ (б/д).

4. Случайные элементы, случайные величины и векторы на вероятностном пространстве. Критерий измеримости отображения (б/д). Следствие: эквивалентные определения случайных величин и векторов. Действия над случайными величинами (все — б/д): борелевские функции от случайных векторов, арифметические операции над случайными величинами, взятие пределов, максимумов и минимумов у последовательности случайных величин.

5. Характеристики случайной величины и случайного вектора: распределение вероятностей, функция распределения, порожденная σ-алгебра. Понятие $\mathcal{C}$-измеримой случайной величины. Теорема о характеризации $\mathcal{F}_\xi$-измеримых случайных величин.

6. Математическое ожидание случайной величины как интеграл Лебега по вероятностной мере. Напоминание из теории меры: основные свойства математического ожидания (б/д).

7. Теорема о замене переменных в интеграле Лебега, следствия из нее. Понятие обобщенной плотности вероятностной меры. Теорема о вычислении интеграла Лебега по вероятностной мере с помощью плотности. Формулы для вычисления математических ожиданий функций от случайной величины (вектора) в дискретном и абсолютно непрерывном случаях.

8. Независимость произвольного набора случайных величин и векторов. Совместное распределение независимых случайных векторов как прямое произведение. Критерий независимости в терминах совместной функции распределения, его обобщение. Теорема о независимости борелевских функций от независимых случайных векторов. Независимость функций от непересекающихся наборов независимых с.в.

9. Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями. Лемма о свертке распределений. Понятие совместной плотности конечного набора случайных величин. Вычисление совместной плотности в случае независимости, критерий независимости в терминах плотностей. Формула свертки для вычисления плотности суммы независимых случайных величин. Пример — гамма распределения.

10. Дисперсия, ковариация и коэффициент корреляции. Основные свойства дисперсии и ковариации, неравенство Коши – Буняковского. Следствие для дисперсии суммы независимых случайных величин. Матрица ковариаций случайного вектора, ее неотрицательная определенность. Неравенства Маркова, Чебышева и Йенсена.

11. Условное математическое ожидание случайной величины относительно σ-алгебры. Теорема о существовании. Явный вид условного математического ожидания в случае, если σ-алгебра порождена счетным разбиением. Основные свойства условного математического ожидания.

12. Условное математическое ожидание $\mathsf{E}(\xi|\eta = y)$, связь с $\mathsf{E}(\xi|\eta)$, основные свойства (б/д). Условное распределение и условная плотность одной случайной величины относительно другой. Теорема о существовании условного распределения (б/д). Теорема о вычислении условного математического ожидания с помощью условной плотности. Теорема о достаточном условии существования условной плотности. Вычисление $\mathsf{E}(f(X,Y)|Y)$ для независимых X и Y.

13. Виды сходимостей случайных величин: с вероятностью 1 (почти наверное), по вероятности, в среднем порядка $p > 0$, по распределению. Критерий сходимости с вероятностью 1 (б/д). Достаточное условие сходимости с вероятностью 1. Теорема о взаимоотношении различных видов сходимостей.

14. Закон больших чисел в форме Чебышева. Усиленный закон больших чисел для попарно некоррелированных случайных величин. Смысл усиленного закона больших чисел.

15. Достаточное условие сходимости с вероятностью 1. Лемма о наличии подпоследовательности, сходящейся п.н., если вся последовательность сходится по вероятности. Усиленный закон больших чисел в форме Кантелли. Смысл усиленного закона больших чисел.

16. Лемма Бореля – Кантелли. Закон нуля или единицы Колмогорова. Лемма Тёплица.

17. Усиленный закон больших чисел в форме Этемади для попарно независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченным математическим ожида-

нием. Следствие: усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова. Критерий выполнимости УЗБЧ для н.о.р.с.в.

18. Слабая сходимость и сходимость в основном вероятностных мер. Теорема Александрова (б/д). Сходимость в основном функций распределения. Теорема об эквивалентности слабой сходимости вероятностных мер и сходимости в основном соответствующих им функций распределения (док-во только для $\mathbb{R}$). Следствие для сходимости по распределению случайных величин.

19. Плотность и относительная компактность семейств вероятностных мер. Теорема Прохорова (док-во только для $\mathbb{R}$). Следствие из нее.

20. Характеристические функции случайных величин, векторов и вероятностных мер. Вычисление характеристической функции для стандартного нормального распределения. Основные свойства характеристических функций случайных величин. Формула обращения для характеристических функций. Вычисление распределения суммы независимых нормальных случайных величин с помощью характеристических функций.

21. Критерий независимости компонент случайного вектора в терминах характеристических функций. Неотрицательная определенность комплекснозначных функций на прямой. Теорема Бохнера – Хинчина (только док-во необходимости).

22. Лемма об оценке “хвоста” распределения с помощью характеристической функции. Теорема непрерывности для характеристических функций.

23. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин, следствия из нее. Смысл ЦПТ. Теорема Берри–Эссеена об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме (б/д).

24. Виды сходимостей случайных векторов, связь с одномерными сходимостями. Теорема о наследовании сходимости. Теорема Слуцкого (общий случай), следствие из нее. Пример применения: построение асимптотического доверительного интервала для параметра в схеме Бернулли.

25. Гауссовские случайные векторы (многомерное нормальное распределение). Теорема о трех эквивалентных определениях. Следствия: смысл параметров, корректность определения, линейные преобразования, независимость компонент.

26. Теорема о плотности гауссовского вектора. Усиленный закон больших чисел для случайных векторов. Многомерная центральная предельная теорема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А. Н., *Вероятность.* В 2-х кн. — 6-е изд. — М.: МЦНМО, 2017.
2. Гнеденко Б. В., *Курс теории вероятностей.* — 12-е изд. — М.: УРСС, 2019.
3. Боровков А. А., *Теория вероятностей.* — 4-е изд. — М.: Едиториал УРСС, 2003.
4. Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер.* — М.: Наука, 1977.