Гауссовские процессы.Винеровский процесс.

1. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ — гауссовский процесс с нулевой функцией среднего и некоторой ковариационной функцией $r(s,t)$. Известно, что для всех $t > 0$ выполнено неравенство $r(t,t) > 0$. Какие из перечисленных ниже процессов $(Y_t, t \geq 0)$ также являются гауссовскими?

   (a) $Y_t = X_t^3$;

   (b) $Y_t = X_{t+1}$;

   (c) $Y_t = X_t I\{X_t \geq 0\}$;

   (d) $Y_t = \sqrt{t} X_{t^2}$.

2. Верно ли, что существует такой гауссовский процесс $(X_t, t \geq 0)$ с $\mathbb{E}X_t = 0$ и ковариационной функцией $R(s,t) = \operatorname{cov}(X_s, X_t)$, если

   (a) $R(s,t) = 0$;

   (b) $R(s,t) = st$;

   (c) $R(s,t) = \max(s,t)$;

   (d) $R(s,t) = e^{-|s-t|}$;

   (e) $R(s,t) = \min(s,t) - st$.

3. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Докажите, что следующие процессы тоже винеровские:

   (a) $X_t = t \cdot W_{\frac{1}{t}} I\{t > 0\}$

   (b) $X_t = -W_t$;

   (c) $X_t = \sqrt{c}\, W_{t/c}$, $c > 0$;

   (d) $X_t = W_{t+a} - W_a$, $a > 0$;

   (e) $X_t = W_t\, I\{t < T\} + (2W_T - W_t) I\{t \geqslant T\}$.

4. Пусть $(Y_t, t \in [0,1])$ — гауссовский процесс с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией $r(s,t) = \min(s,t) - st$. Докажите, что такой процесс существует и что процесс $(X_t = (t+1)Y_{t/(t+1)},\ t \geqslant 0)$ является винеровским.

5. Пусть $(W_t,\ t > 0)$ — винеровский процесс. Рассмотрим случайную величину

$$Z(T) = \sum_{i=1}^{n} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2,$$

   где $T = \{a = t_0 < \ldots < t_n = b\}$ — разбиение отрезка $[a,b]$. Каков предел в среднем квадратичном $Z(T)$ при стремлении к нулю диаметра разбиения?