

Винеровский процесс. Моменты остановки.

1. Пусть последовательность положительных чисел $\{t_n, n \in \mathbb{N}\}$ такова, что $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{-1/2} < \infty$. Докажите, что тогда

$$|W_{t_n}| \rightarrow +\infty$$

п.н. с ростом n . Здесь $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс.

2. Рассмотрим $\tau_x = \inf\{t : W_t = x\}$ — первый момент времени достижения уровня $x \in \mathbb{R}$ винеровским процессом. Докажите, что τ_x — момент остановки относительно естественной фильтрации винеровского процесса.
3. Пусть τ_1 и τ_2 — марковские моменты остановки относительно фильтрации $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$. Докажите, что $\min(\tau_1, \tau_2)$ и $\max(\tau_1, \tau_2)$ также являются марковскими моментами остановки. Рассмотрите случай, когда параметр времени а) $T = \mathbb{N}_0$, б) $T = [0, \infty)$.
4. Пусть τ — марковский момент остановки относительно фильтрации $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$, и случайный процесс X согласован с \mathcal{F} . Докажите, что случайная величина X_τ является \mathcal{F}_τ -измеримой (если $\tau = +\infty$, то положим $X_\tau := +\infty$).

а) В случае $T = \mathbb{N}_0$.

б) В случае $T = [0, +\infty)$ и траектории процесса X непрерывны справа.

5. Пусть W_t — винеровский процесс и $M_t = \max_{s \in [0, t]} W_s$. Найдите распределение случайной величины M_t и покажите, что $M_t \stackrel{d}{=} |W_t|$ (Теорема Башелье).
6. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс, а $\tau_x = \inf\{t : W_t = x\}$ — первый момент достижения уровня x . С помощью теоремы Башелье вычислите плотность τ_x .
7. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс, а $\tau_x = \inf\{t : W_t = x\}$ — первый момент достижения уровня x . Найдите $E\tau_x$.
8. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Положим $\tau_x = \inf\{t : W_t = x\}$ для некоторого $x > 0$. Найдите плотность случайной величины $Y_a = \sup_{t \in [\tau_x, \tau_x + a]} W_t$.
9. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс, а $u > s > 0$. Найдите

$$P(W_t \text{ не имеет нулей на отрезке } [s, u]).$$

10. Дан $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Пусть

$$\tau = \inf\{t : W_t = 2 \text{ или } W_t = -1\}.$$

Докажите, что τ является моментом остановки. Какова вероятность того, что $W_\tau = 2$?

11. Рассмотрим случайную величину

$$T = \arg \max_{s \in [0, 1]} W_s,$$

то есть момент достижения максимума на отрезке $[0, 1]$.

а) Покажите, что T определена корректно, иными словами докажите, что с вероятностью 1 максимум на отрезке $[0, 1]$ достигается в единственной точке.

б) Найдите распределение T , а именно докажите, что

$$T \sim B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$