Марковские Цепи с дискретным временем.

1. Докажите, что процесс $(X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+)$ со значениями в не более чем счетном множестве $\mathcal{X}$ является марковской цепью тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ и любых $a_{n+1}, \dots, a_0 \in \mathcal{X}$ выполнено
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = a_{n+1} \mid X_n = a_n, \dots, X_0 = a_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = a_{n+1} \mid X_n = a_n),$$
всегда, когда вероятности условий положительны.

2. Пусть $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью $p(x)$, положительной при всех $x \in \mathbb{R}$. Укажите, являются ли следующие случайные последовательности цепями Маркова:
   (а) $\xi = (\xi_n,\, n \in \mathbb{N})$;
   (б) $S = (S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n,\, n \in \mathbb{Z}_+)$, где $S_0 = 0$;
   (в) $S^+ = (S_n \mathbf{1}(S_n \geq 0),\, n \in \mathbb{Z}_+)$;
   (г) $T = (T_n = \max\{S_0, \dots, S_n\},\, n \in \mathbb{Z}_+)$.

   Для тех, которые окажутся цепями Маркова, укажите переходные вероятности за один шаг.

3. Пусть $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — марковская цепь с фазовым пространством $S = \{1, 2, 3\}$, начальным состоянием $\xi_0 = 1$ п.н. и матрицей переходных вероятностей
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} & \frac{8}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix}.$$
Положим $\eta_n = \mathbf{1}\{\xi_n = 1\} + 2\mathbf{1}\{\xi_n \neq 1\}$. Докажите, что η_n — тоже марковская цепь, и найдите её матрицу переходов.

4. Марковская цепь $(\xi_n,\, n \in \mathbb{Z}_+)$ имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности $\mathbb{P}(\xi_{n+1} = k+1 \mid \xi_n = k) = p$, $\mathbb{P}(\xi_{n+1} = k \mid \xi_n = k) = 1 - p$, где $k, n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$. Найдите распределение ξ_n. Докажите, что последовательность $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \min\{n : \xi_n = k\}$ также является цепью Маркова и найдите её переходные вероятности.

5. Цепь Маркова ξ_n имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности $\mathbb{P}(\xi_{n+1} = k+1 \mid \xi_n = k) = a^{-k}$, $\quad \mathbb{P}(\xi_{n+1} = k \mid \xi_n = k) = 1 - a^{-k}$, где $k, n \in \mathbb{Z}_+$, $a > 1$. Найдите $\mathbb{E}a^{\xi_n}$ и $\mathrm{Var}(a^{\xi_n})$.

6. Приведите пример такой однородной марковской цепи с дискретным временем, что а) у неё есть несколько стационарных распределений, но нет предельного; б) у неё нет стационарного распределения, но есть пределы переходных вероятностей при $n \to \infty$.

   Докажите, что если однородная марковская цепь с дискретным временем имеет несколько стационарных распределений, то их, на самом деле, бесконечно много.

7. Пусть $(\xi_n,\, n \in \mathbb{Z}_+)$ — независимые одинаково распределённые случайные величины со значениями $\{0, 1, 2, 3\}$ и следующим распределением:
$$\mathbb{P}(\xi_n = 0) = \frac{1}{7}, \quad \mathbb{P}(\xi_n = 1) = \frac{2}{7}, \quad \mathbb{P}(\xi_n = 2) = \frac{3}{7}, \quad \mathbb{P}(\xi_n = 3) = \frac{1}{7}.$$
Рассматриваются процессы $X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n \pmod 4$, $n \in \mathbb{N}$ (остаток от деления суммы на 4) и $Y_n = \xi_1 \cdots \xi_n \pmod 4$.

   Докажите, что $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ и $(Y_n,\, n \in \mathbb{N})$ являются однородными марковскими цепями, и найдите их предельные распределения.