Марковские Цепи с непрерывным временем и Эргодическая теорема.

1. Дана марковская цепь $(Y_n,\ n \in \mathbb{Z}_+)$, причем $Y_n = X_{n^2}$, где $(X_n,\ n \in \mathbb{Z}_+)$ — однородная марковская цепь с фазовым пространством $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ и матрицей переходных вероятностей
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$
Отметьте верные утверждения относительно цепи Y_n.
   1) Y_n — однородная марковская цепь с матрицей переходных вероятностей P;
   2) Y_n не является однородной марковской цепью;
   3) предельное распределение Y_n равно
$$\left(\frac{32}{115}, \frac{45}{115}, \frac{38}{115}\right).$$

2. Пусть $(X_n,\ n \in \mathbb{Z}_+)$ — ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с законом размножения частиц $\mathrm{Pois}(1/3)$ (пуассоновское распределение с параметром $1/3$).

   Рассматривая его как однородную марковскую цепь, найдите его предельное распределение на фазовом пространстве $S = \mathbb{Z}_+$.

3. Пусть $(\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}_+)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями $\{1, 2, 3, 4\}$ и следующим распределением:
$$\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \frac{1}{8}, \quad \mathbb{P}(\xi_n = 2) = \frac{3}{8}, \quad \mathbb{P}(\xi_n = 3) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(\xi_n = 4) = \frac{1}{4}.$$
Рассматривается однородная марковская цепь $X_n = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdots \xi_n \pmod 5$, $\quad n \in \mathbb{N}$, (остаток от деления произведения на 5). Чему равно предельное распределение цепи X_n?

4. Докажите, что пуассоновский процесс интенсивности λ является однородной марковской цепью. Найдите его переходные вероятности, инфинитезимальную матрицу и стационарное распределение.

5. Всякий ли процесс восстановления является марковской цепью?

6. Пусть $n \times n$ матрица $Q = (q_{ij})_{i,j=1}^n$ такова, что $q_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ и $\sum_{j=1}^n q_{ij} = 0$ для любого $i = 1, \dots, n$. Докажите, что тогда матрицы
$$P(t) = \exp\{tQ\}$$
образуют стохастическую полугруппу.

7. Докажите, что переходные вероятности $p_{ij}(t)$ стандартной стохастической полугруппы равномерно непрерывны на $\mathbb{R}_+$.

8. Переходные вероятности марковской цепи $(X_t, t \geq 0)$ с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3\}$ имеют вид:
$$p_{11}(h) = 1 - \lambda h + o(h), \quad p_{12}(h) = \lambda h + o(h), \quad p_{13}(h) = o(h),$$
$$p_{21}(h) = o(h), \quad p_{22}(h) = 1 - \mu h + o(h), \quad p_{23}(h) = \mu h + o(h),$$
$$p_{31}(h) = \nu h + o(h), \quad p_{32}(h) = o(h), \quad p_{33}(h) = 1 - \nu h + o(h),$$
при $h \to 0+$.

   Докажите, что такая цепь удовлетворяет условию эргодической теоремы. Найдите её инфинитезимальную матрицу и стационарное распределение.

9. Система “массового обслуживания” состоит из прибора и ремонтного устройства. Прибор работает случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром λ. Ремонт прибора занимает случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром μ. Обозначим
$$p_1(t) = P(\text{прибор работает в момент времени } t),$$
$$p_2(t) = P(\text{прибор ремонтируется в момент времени } t).$$

   Найдите $p_i(t)$, $i \in \{1, 2\}$, при условии $p_1(0) = p_2(0) = \frac{1}{2}$, предполагая, что процесс образует марковскую цепь.

10. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые неотрицательные одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения $F(x)$. Является ли процесс $Y = (Y(x), x \geq 0)$, где
$$Y(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}\{X_j \leq x\},$$
— это эмпирическая функция распределения, марковской цепью? Если да, то найдите её переходные вероятности и проверьте на однородность.