Мартингалы.

1. Пусть $(X_n,\ n \in \mathbb{Z}_+)$ — ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с законом размножения частиц Pois(1/2) (пуассоновское распределение с параметром 1/2). Какие из следующих процессов $(Y_n,\ n \in \mathbb{Z}_+)$ являются мартингалами относительно естественной фильтрации процесса $(X_n,\ n \in \mathbb{Z}_+)$?

   1) $Y_n = X_n$;
   2) $Y_n = \frac{1}{2} X_n$;
   3) $Y_n = 2^n X_n$;
   4) $Y_n = X_n - X_{n-1}$;
   5) $Y_n = X_n + X_{n-1}$.

2. Пусть $(W_t,\, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Докажите, что процесс $Y_t = W_t^2 - t$ является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса W_t.

3. Пусть $(W_t,\, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Найдите все такие пары $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, что процесс $X_t = \exp\{\alpha W_t + \beta t\},\ t \geq 0$, является мартингалом (субмартингалом, супермартингалом) относительно естественной фильтрации процесса W_t.

4. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — такая последовательность случайных величин, что для любого n существует плотность $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ случайного вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ — другая последовательность случайных величин, причем также для любого n существует плотность $g_n(x_1, \ldots, x_n)$ случайного вектора $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Докажите, что процесс

$$X_n = \frac{g_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)}$$

   является мартингалом относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n),\, n \in \mathbb{N})$.

5. Пусть $(W_t,\, t \geq 0)$ — винеровский процесс, а τ — момент остановки относительно его естественной фильтрации. Докажите, что процесс

$$X_t = W_{\min(t,\tau)}, \quad t \geq 0$$

   является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса W_t.

   Указание: надо аппроксимировать τ марковскими моментами с конечным числом значений.

6. Пусть $(X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+)$ — ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с законом размножения частиц Pois(3). Найдите разложение Дуба–Мейера для данного процесса.

7. Докажите, что если τ — марковский момент относительно $\mathbb{F} = (F_t,\, t \geq 0)$, то τ является и опциональным моментом относительно $\mathbb{F}$.

8. Пусть $(W_t,\ t \geq 0)$ — винеровский процесс, а

$$\tau = \min\{t : |W_t| = 1\}.$$

   Чему равно $\mathbb{E}\tau$?

9. Пусть $(S_n,\, n \in \mathbb{N})$ — простейшее случайное блуждание с вероятностью шага вправо p. Пусть $a < x < b$ — целые числа, а $X_n = x + S_n,\ n \geq 1$. Обозначим $\tau = \min\{n : S_n \in \{a, b\}\}$ — момент выхода процесса X_n из полосы. Вычислите $\mathbb{E}\tau$.