Марковские Процессы.

1. Пусть $(X_t,\, t \in T)$ — марковский процесс, $T \subset \mathbb{R}_+$. Пусть для любого $t \in T$ задана борелевская функция h_t. Рассматривается случайный процесс $Y_t = (h_t(X_t),\, t \in T)$. Докажите, что если h_t — биекция для любого $t \in T$ (считаем, что в этом случае h_t^{-1} — тоже борелевская), то Y_t — тоже марковский процесс. Приведите пример марковского процесса X_t и борелевских функций h_t, при которых процесс Y_t не является марковским.

2. Пусть $(X_t,\, t \in T)$, $(Y_t,\, t \in T)$ — независимые марковские процессы. Верно ли, что процесс $(X_t + Y_t,\, t \in T)$ тоже марковский?

3. Верно ли, что общее число частиц $Y = (Y_n = X_0 + \cdots + X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+)$ ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона $X = (X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+)$ является марковским процессом: а) относительно естественной фильтрации процесса X, б) относительно естественной фильтрации процесса Y?

4. Пусть $(W_t,\, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Является ли марковским процесс $X_t = W_t^2$?

5. Пусть $(W_t,\, t \geq 0)$ — винеровский процесс, а $\tau_x = \min\{t : W_t = x\}$ для $x \geq 0$. Докажите, что процесс $\tau = (\tau_x,\, x \geq 0)$ является марковским.

6. Пусть $(W_t,\, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Вычислите его переходную плотность.

7. Пусть $(X_n,\, n \geq 0)$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на множестве $\{-1, 0, 1\}$. Рассмотрим процесс $Y_n = X_0X_1 + X_1X_2 + \cdots + X_{n-1}X_n$.

   Докажите, что Y_n является мартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F} = (\sigma(X_1, \ldots, X_n),\, n \in \mathbb{Z}_+)$, но не является марковским процессом относительно неё.