

Определение 1. Состояние i называется существенным, если оно сообщается с каждым из следующих за ним состояний. В противном случае оно называется несущественным.

Определение 2. Если в цепи Маркова все состояния сообщаются, то такая цепь называется неразложимой или неприводимой.

Определение 3. Состояние i называется возвратным, если $F_i = 1$, то есть если вероятность возвращения цепи в это состояние за конечное число шагов равна единице. В противном случае, то есть если $F_i < 1$, состояние называется невозвратным.

Стоит обратить внимание, что «возвратность» состояния означает не то, что цепь в него возвращается с какой-то ненулевой вероятностью, то есть $p_{ii}(n) > 0$ для какого-то n , а то, что цепь возвращается в это состояние с вероятностью 1 за конечное число шагов.

Теорема 1. Состояние i является возвратным тогда и только тогда, когда

$$R_i = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty.$$

Определение 4. Если $i \rightarrow i$, то наибольший общий делитель множества положительных n , для которых $p_{ii}(n) > 0$, называется периодом состояния i и обозначается d_i . Если $d_i = 1$, то такое состояние называют неперiodическим.

Определение 5. Состояние i называется нулевым, если $p_{ii}(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Иначе, то есть если предел последовательности $p_{ii}(n)$ при $n \rightarrow \infty$ не существует или существует, но не равен нулю, состояние i называется ненулевым.

Следствие 1. В неразложимых цепях Маркова:

1. если одно из состояний нулевое, то все состояния нулевые;
2. если одно из состояний возвратное, то все состояния возвратные;
3. если одно из состояний имеет период $d \geq 1$, то все состояния имеют тот же самый период d .

Теорема 2 (*). В конечных неразложимых цепях Маркова все состояния являются ненулевыми и, следовательно, возвратными.

Определение 6. Дискретная цепь Маркова называется эргодической, если для любых $i, j \in S$ существуют положительные пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = p_j > 0,$$

не зависящие от i .

Теорема 3 (Эргодическая теорема для конечных цепей Маркова). Для того чтобы конечная дискретная цепь Маркова была эргодической, необходимо и достаточно, чтобы она была неразложимой и неперiodической.

Теорема 4 (Теорема о предельном распределении). В конечных эргодических цепях:

1. существуют постоянные $C > 0$ и $\rho \in (0, 1)$, такие, что

$$|p_{ij}(n) - p_j| \leq C\rho^n;$$

2. числа p_j задают распределение состояний;

3. это распределение является стационарным;

4. это распределение является единственным стационарным распределением для данной цепи Маркова;

5. распределение состояний $\pi_j(n)$ сходится в пределе к p_j .

Теорема 5. В конечных стандартных цепях Маркова функция $P(t)$ удовлетворяет системам дифференциальных уравнений

$$\dot{P}(t) = P(t)Q, \quad P(0) = I, \quad (1)$$

$$\dot{P}(t) = QP(t), \quad P(0) = I, \quad (2)$$

которые имеют единственное решение

$$P(t) = \exp(Qt),$$

выражаемое в виде матричной экспоненты, где Q — производная в нуле функции $P(t)$.

Определение 7. Непрерывная цепь Маркова с переходной матрицей P называется однородной, если для любых $s, t \geq 0$

$$P(s, s+t) = P(0, t).$$

Теорема 6. Пусть $\{X(t), t \geq 0\}$ — непрерывная справа непрерывная цепь Маркова. Тогда для любого $s \geq 0$ покомпонентно

$$P(s, t) \rightarrow I, \quad t \rightarrow s+0,$$

где I — единичная матрица. В частности, для однородной цепи

$$P(t) \rightarrow I, \quad t \rightarrow 0+0.$$

Теорема 7 (*). Пусть $P(t)$ — матрица вероятностей перехода стандартной цепи Маркова. Тогда существует матрица

$$Q = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{P(h) - I}{h}$$

с компонентами q_{ij} , причем $0 \leq q_{ij} < \infty$, $q_i = -q_{ii} \in [0, \infty)$.

Теорема 8. Матрица вероятностей перехода $P(t)$ конечной стандартной цепи Маркова непрерывна в любой точке t .

Теорема 9 (Закон больших чисел). В конечных эргодических цепях Маркова

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n I(X_k = j) \xrightarrow{\mathbb{P}} p_j, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $p_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n)$, а $I(A)$ — индикаторная функция события A .

Для $i \neq j$ числа q_{ij} называются *интенсивностью перехода* из состояния i в состояние j . Так как $\sum_j p_{ij}(h) = 1$ для любого h , то в конечной цепи

$$1 + q_{ii}h + \sum_{j \neq i} q_{ij}h + o(h) = 1,$$

откуда следует

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = -q_{ii} = q_i.$$

Это значит, что сумма элементов каждой строки матрицы Q равна нулю.

Если цепь стартует из состояния i , то $\mathbb{P}(X(0) = i) = 1$, и время пребывания в состоянии i имеет показательное распределение интенсивности q_i , то есть

$$\tau_i^D \sim \text{Exp}(q_i).$$

Введем функцию

$$F_{ij}(h) = \mathbb{P}(X(t+h) = j \mid X(t) = i, X(t+h) \neq i), \quad i \neq j.$$

По определению условной вероятности при $h \rightarrow 0$

$$F_{ij}(h) = \frac{\mathbb{P}(X(t+h) = j \mid X(t) = i)}{1 - \mathbb{P}(X(t+h) = i \mid X(t) = i)} \rightarrow \frac{q_{ij}}{q_i}.$$

Отсюда следует, что числа q_{ij} определяют приоритет одних состояний перед другими в момент прыжка. Можно доказать, что q_{ij}/q_i — это вероятность перейти в состояние j из состояния i в момент прыжка.

9.1. Эргодические непрерывные цепи Маркова

Всюду далее речь идет про однородные цепи Маркова.

Определение 8. Распределение состояний π^0 называется *стационарным*, если

$$P^T(t)\pi^0 = \pi^0, \quad \forall t \geq 0,$$

где $P(t)$ — матрица перехода.

Так как распределение состояний подчиняется уравнению

$$\dot{\pi}(t) = Q^T \pi,$$

то для стационарного распределения π^0 обязательно

$$Q^T \pi^0 = 0.$$

Определение 9. *Непрерывная цепь Маркова называется эргодической, если для любых $i, j \in S$ существуют положительные пределы*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = p_j > 0,$$

не зависящие от i .

Теорема 10 (Эргодическая теорема для конечных цепей Маркова). *Для того чтобы конечная непрерывная цепь Маркова была эргодической, необходимо и достаточно, чтобы она была неразложимой.*