Подготовка к к/р.

1. Система "массового обслуживания" состоит из прибора и ремонтного устройства. Прибор работает случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром λ. Ремонт прибора занимает случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром μ. Обозначим
$$p_1(t) = P(\text{прибор работает в момент времени } t),$$
$$p_2(t) = P(\text{прибор ремонтируется в момент времени } t).$$
Найдите $p_i(t),\ i \in \{1, 2\}$, при условии $p_1(0) = p_2(0) = \frac{1}{2}$, предполагая, что процесс образует марковскую цепь.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые неотрицательные одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения $F(x)$. Является ли процесс $Y = (Y(x), x \geq 0)$, где
$$Y(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}\{X_j \leq x\},$$
— это эмпирическая функция распределения, марковской цепью? Если да, то найдите её переходные вероятности и проверьте на однородность.

3. Рассматривается игра двух лиц с их начальными капиталами m (у первого игрока) и M (у второго игрока). Игра многошаговая: на каждом шаге первый игрок с вероятностью p получает единицу денег от второго игрока, а с вероятностью $q = 1 - p$ отдаёт единицу денег второму игроку. Составьте соответствующую цепь Маркова, классифицируйте её состояния и найдите вероятность проигрыша первого игрока.

4. Пусть $(W_t,\ t \geq 0)$ — винеровский процесс. Найдите все такие пары $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, что процесс $X_t = \exp\{\alpha W_t + \beta t\},\ t \geq 0$, является мартингалом (субмартингалом, супермартингалом) относительно естественной фильтрации процесса W_t.

5. Пусть $(S_n,\ n \in \mathbb{N})$ — простейшее случайное блуждание с вероятностью шага вправо p. Пусть $a < x < b$ — целые числа, а $X_n = x + S_n,\ n \geq 1$. Обозначим $\tau = \min\{n : S_n \in \{a, b\}\}$ — момент выхода процесса X_n из полосы. Вычислите $\mathbb{E}\tau$.

6. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс, а $u > s > 0$. Найдите
$$\mathsf{P}\left(W_t \text{ не имеет нулей на отрезке } [s, u]\right).$$

7. Дан $(W_t,\ t \geq 0)$ — винеровский процесс. Пусть
$$\tau = \inf\{t : W_t = 2 \text{ или } W_t = -1\}.$$
Докажите, что τ является моментом остановки. Какова вероятность того, что $W_\tau = 2$?

8. Рассмотрим случайную величину
$$T = \arg\max_{s \in [0,1]} W_s,$$
то есть момент достижения максимума на отрезке $[0, 1]$.

а) Покажите, что T определена корректно, иными словами докажите, что с вероятностью 1 максимум на отрезке $[0, 1]$ достигается в единственной точке.

б) Найдите распределение T, а именно докажите, что

$$T \sim \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

9. Пусть $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ — положения всех скачков пуассоновского процесса с интенсивностью λ. «Проредим» эту последовательность, оставляя каждую точку независимо от остальных лишь с вероятностью $p \in (0, 1)$. Докажите, что полученная последовательность скачков соответствует другому пуассоновскому процессу, и найдите интенсивность этого процесса.