

## Теорминимум курса «Случайные процессы»

1. Общее понятие случайного процесса (случайной функции), траектории случайного процесса. Пример: процессы восстановления.
2. Пространство траекторий, цилиндрическая сигма-алгебра, меры на пространстве траекторий.
3. Конечномерные распределения случайного процесса, условия согласованности. Распределения случайных процессов в пространстве траекторий. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса с заданными конечномерными распределениями (формулировка).
4. Процессы с независимыми приращениями. Критерий существования процесса с независимыми приращениями в терминах характеристических функций (формулировка). Определение процесса Леви.
5. Пуассоновский процесс постоянной интенсивности как процесс с независимыми приращениями, доказательство существования. Явная конструкция пуассоновского процесса как процесса восстановления для экспоненциальных случайных величин (формулировка).
6. Ковариационная функция случайного процесса, ее симметричность и неотрицательная определенность (доказательство). Гауссовские случайные процессы. Доказательство существования гауссовского процесса с заданными средним и ковариацией.
7. Винеровский процесс (процесс броуновского движения). Доказательство существования.
8. Модификация случайного процесса. Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации (формулировка). Доказательство существования непрерывной модификации винеровского процесса. Представление винеровского процесса в виде функционального ряда с независимыми случайными коэффициентами (формулировка).
9. Броуновский мост. Недифференцируемость траекторий винеровского процесса (формулировка). Закон повторного логарифма для винеровского процесса (формулировка).
10. Условные вероятности и условные математические ожидания (определение и формулировки основных свойств).
11. Понятие фильтрации на вероятностном пространстве, согласованность случайного процесса с фильтрацией. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Примеры мартингалов и субмартингалов. Теорема Дуба о сходимости мартингалов (формулировка).
12. Разложение Дуба–Мейера для согласованных процессов с дискретным временем (доказательство).
13. Марковские моменты и моменты остановки. Теорема об остановке для дискретного времени (формулировка).
14. Задача о разорении игрока: мартингальный подход к решению (формулировка).
15. Марковские процессы, равносильность различных описаний марковского свойства (формулировка). Переходные функции, уравнения Чэпмена–Колмогорова (формулировка). Однородные марковские процессы. Примеры.
16. Цепи Маркова с дискретным временем и счетным числом состояний. Теорема о существовании конечных марковских цепей (формулировка). Однородные цепи Маркова. Существование стационарных распределений однородной конечной цепи Маркова (доказательство).
17. Условие эргодичности конечной цепи Маркова (формулировка).
18. Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона. Производящие функции случайных величин, их основные свойства. Соотношение между производящими функциями числа частиц в  $n$ -м и  $(n + 1)$ -м поколениях (формулировка).
19. Уравнение для вероятности вырождения процесса Гальтона–Ватсона и теорема о вероятности вырождения (формулировка).
20. Модель страхования Крамера – Лундберга и оценка вероятности разорения (формулировка).